Ueber zweite Polarflächen einer allgemeinen Fläche 4. Ordnung.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

der hohen

philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau

eingereicht

und mit ihrer Genehmigung veröffentlicht

von

Reinhold Schmidt.

Donnerstag, den 30. Juli 1908, Mittags 12½ Uhr

in der Aula Leopoldina

Vortrag:

„Die Entwicklung der algebraischen Zeichensprache“

und

Promotion.

ACAD. LEOPOLDINA BIBL.

Breslau
Buchdruckerei H. Fleischmann
1908.

Gedruckt mit Genehmigung der hohen philosophischen Fakultät der Königl. Universität Breslau.

Referent: Professor Dr. **Sturm.**

Das mündliche Examen hat stattgefunden am 13. Mai 1908.

Dem Andenken meines Vaters.

Dem Andenken meines Vaters.

Vorwort.

Die Theorie der Polarflächen eines Punktes in Bezug auf eine Grundfläche n-ter Ordnung ist in dem Werke:

„Cremona, Prelininari di una teoria geometrica delle superficie“ eingehend behandelt worden; mir selbst sind bei dem Studium dieser Theorie die Vorlesungen von Herrn Prof. Dr. Sturm, „Geometrische Örter höheren Grades“ besonders wertvoll gewesen.

Danach gibt es zu jedem Punkt des Raumes in Bezug auf eine Fläche n-ter Ordnung n-1 Polarflächen mit den Ordnungszahlen n-1, n-2, . . 2,1.

Die ersten und letzten Polarflächen von Punkten sind bereits genau untersucht worden, dagegen ist von den zweiten Polarflächen noch weniger bekannt.

In der vorliegenden Arbeit ist nun als Grundfläche, eine allgemeine Fläche 4. Ordnung gewählt, für welche die zweite Polarfläche eines Punktes identisch ist mit der (n-2)-ten und die Systeme solcher zweiter Polarflächen sollen hier zunächst behandelt werden.

Daran schliesst sich eine Untersuchung der reinen Polarflächen von Geraden und Ebenen, wie sie definiert werden in „Cremona, Mémoire de Gèometrie pure sur les surfaces du troisième ordre“ (47)—(51), und zum Schluss sollen die Systeme der gemischten 2. Polarflächen von zwei Punkten, sowie der gemischten Polarflächen von zwei Geraden bezw. 2 Ebenen behandelt werden.

An Literatur ist noch benuzt worden:

1). „Cremona, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung, ins Deutsche übertragen von Maximilian Curtze“, worin die beiden bereits citierten Arbeiten von Cremona vereinigt sind,

2) „Cremona, Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane,“

3) „Sturm, Liniengeometrie I“, und

4) „Schubert, Kalkül der abzählenden Geometrie.“

Bei Citaten sollen der Einfachheit wegen die 4 Bücher von Cremona bezeichnet werden mit: „Preliminari“, „Mémoire“, „Grundzüge“ und „Introduzione.“

Einleitung.

Bevor ich in die Abhandlung eintrete, muss ich auf die Untersuchungen Cremonas über symmetrische Komplexe in „Mémoire", Chap. III bezw. „Grundzüge", Kap. IX eingehen, da sich meine Resultate mehrfach auf jene stützen, und zwar zunächst auf den Abschnitt (43) bezw. (152), der von 3 kollinearen Netzen handelt, die einen symmetrischen Komplex bilden.

(1.) In diesem Abschnitt spricht Cremona aus, dass die von den projektiven Büscheln (P_{21}, P_{23}), $(P_{31}, P_{33},)$ aus dem 2. und 3. Netze erzeugte Fläche Φ_{12} identisch ist mit der durch die projektiven Büschel (P_{12}, P_{13}), (P_{32}, P_{33}) aus dem 1. und 3. Netze erzeugten Fläche Φ_{21}. Das ist aber im allgemeinen nicht richtig, wenn die Projektivität der Büschel beidemal, wie notwendig, die durch die Kollineation der Netze, $(P_{11}, P_{12}, P_{13} \ldots)$, $(P_{21}, P_{22}, P_{23}, \ldots)$ und $(P_{31}, P_{32}, P_{33} \ldots)$ erzeugte sein soll, worauf mich Herr Prof. Dr. Sturm gütigst aufmerksam machte.

Jedoch bei den folgenden Untersuchungen liegt ein spezieller Fall vor, bei dem die Identität von Φ_{12} und Φ_{21} nachweisbar ist; es handelt sich um gemischte zweite Polarflächen. P_1, P_2, P_3 seien die ersten Polarflächen der Punkte 1, 2, 3 in Bezug auf die Grundfläche, und $P_{1\rho}$, $P_{2\rho}$, $P_{3\rho}$ die gemischten zweiten Polarflächen des Punktes ρ einerseits und der Punkte 1, 2, 3 andererseits.

Die kollinearen Netze sind dann $(P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14} \ldots P_{1\rho})$ u. s. w., wenn ρ in der Ebene (123) bleibt. Φ_{12} wird erzeugt durch die projektiven Büschel $(P_{21}, P_{23}, \ldots P_{2r})$ und

(P_{31}, P_{33} . . . P_{3r}), wo r ein beliebiger Punkt der Gerade (13) ist. Die beiden Büschel sind also die der ersten Polarflächen der Punkte von (13) in Bezug auf P_2 und P_3; diese sind projektiv, und zwei entsprechende Flächen P_{2r} und P_{3r} schneiden sich in eine Curve auf Φ_{12}, der Schnittkurve der ersten Polarflächen von r in Bezug auf P_2 und P_3, also nach dem Fundamentabsatz über gemischte Polarflächen auch der ersten Polarflächen von 2 und 3 in Bezug auf P_r d. i. die Polarkurve von (23) in Bezug auf auf P_r [1]). Jetzt nehme ich einen Punkt X auf Φ_{12}; er liegt auf einer der erzeugenden Polarkurven etwa auf der zu P_r gehörigen von (23). Dann geht die (n-2)-te Polarfläche[1]) von X in Bezug auf P_r durch (23), oder die 1. Polarfläche von r in Bezug auf die vorletzte Π_x von X durch (2 3), d. h. die Polarebene von r in Bezug auf Π_x, eine Fläche 2. Grades, geht durch (23), und da r auf (13) liegt, so fällt die Polare von (13) in Bezug auf Π_x in jene Ebene, trifft also (23), sodass (13) und (23) konjugiert sind in Bezug auf Π_x. Φ_{12} ist also der Ort der Punkte, für deren vorletzte Polarflächen (23) zu (13) konjugiert ist (Cremona, Mémoire (48)).

Erzeuge ich dann hier Φ_{21} mit Hülfe der durch die Netzkollineation bestehenden Projektivität zwischen (P_{12}, P_{13}), (P_{22}, P_{33}), so erhalte ich Φ_{21} analog als Ort der Punkte, für deren vorletzte Polarflächen (13) zu (23) konjugiert ist; folglich ist hier $\Phi_{12} \equiv \Phi_{21}$, sodass für den speziellen Fall die Schlüsse Cremonas in Mémoire (43) bis (45) richtig sind. Diese Fläche $\Phi_{12} \equiv \Phi_{21}$ hat als Erzeugnis zweier projektiver Büschel von Flächen (n-2)-ter Ordnung, die Ordnung 2 $(n-2)^2$), und ist durch die hier gefundene Eigenschaft definiert als die gemischte Polarfläche der beiden Geraden (13) und (23) in Bezug auf F^n.

(2) Ganz ähnlich liegt die Sache bei dem Erzeugnis von 4 kollinearen Gebüschen, die einen symmetrischen Komplex bilden, „Mémoire“ (46) bezw. „Grundzüge“ (155).

---

[1]) Cremona, Grundzüge (86)
[2]) - - (113)

Dort liegen 4 kollineare Gebüsche vor:

G_1 enthaltend $P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15} \ldots\ldots\ldots,$
G_2 " $P_{21}, P_{22}, P_{23}, P_{24}, P_{25} \ldots\ldots\ldots,$
G_3 " $P_{31}, P_{32}, P_{33}; P_{34}, P_{35} \ldots\ldots\ldots,$
G_4 " $P_{41}, P_{42}, P_{43}, P_{44}, P_{45} \ldots\ldots\ldots,$

mit untereinander stehenden Flächen als entsprechenden und der besonderen Massgabe, dass $P_{12} \equiv P_{21}$, $P_{13} \equiv P_{31}$, $P_{14} \equiv P_{41}$, $P_{23} \equiv P_{32}$, $P_{24} \equiv P_{42}$ und $P_{34} \equiv P_{43}$ ist.

Die Fläche Ψ_{12} wird dann erzeugt durch die kollinearen Netze

(P_{21}, P_{23}, P_{24}) aus G_2
(P_{31}, P_{33}, P_{34}) aus G_3 und
(P_{41}, P_{43}, P_{44}) aus G_4: dann folgt aus dem letzten Absatz von (45) bezw. (154), dass dieselbe Fläche Ψ_{12} auch erzeugt werden kann durch eine kollineare Beziehung der 3 Netze

(P_{21}, P_{31}, P_{41}), (P_{23}, P_{33}, P_{43}) und
(P_{24}, P_{34}, P_{44}) oder der Netze
(P_{12}, P_{13}, P_{14}) aus G_1,
(P_{32}, P_{33}, P_{34}) aus G_3, und
(P_{42}, P_{43}, P_{44}) aus G_4, aber diese Kollineation ist wieder nicht dieselbe wie die infolge der Kollineation der Gebüsche zwischen den 3 Netzen bestehende, so dass ich im allgemeinen Ψ_{12} nicht mit der durch diese Kollineation zwischen (P_{12}, P_{13}, P_{14}), (P_{32}, P_{33}, P_{34}), und (P_{42}, P_{43}, P_{44}) erzeugten Fläche Ψ_{21} identifizieren kann.

Im speziellen Fall der gemischten 2. Polarflächen ist dagegen die Identität wieder nachweisbar. P_1, P_2, P_3, P_4 sind die 1. Polarflächen der 4 beliebig gelegenen Punkte 1, 2, 3, 4; P_{rs} ist die gemischte 2. Polarfläche der Punkte r und s. Die 4 Gebüsche erhalte ich dann durch die 1. Polarflächen aller Punkte in Bezug auf P_1, P_2, P_3 und P_4. Ψ_{12} wird erzeugt durch die kollinearen Netze

$(P_{21}, P_{23}, P_{24} \ldots P_{2r})$,
$(P_{31}, P_{33}, P_{34} \ldots P_{3r})$, und
$(P_{41}, P_{43}, P_{44} \ldots P_{4r})$, wo der Punkt r ein

Punkt der Ebene (134) ist, so dass die 3 Netze gebildet werden von den 1. Polarflächen der Punkte der Ebene (134) in Bezug auf P_2, P_3 und P_4. Diese Netze sind kollinear, und 3 entsprechende Flächen P_{2r}, P_{3r}, P_{4r} sind die ersten Polarflächen des Punktes r in Bezug auf P_2, P_3, P_4; sie haben $(n-2)^3$ Punkte gemein, die auf Ψ_{12} liegen. Nehme ich einen solchen Punkt X auf Ψ_{12}, so gehen durch ihn die ersten Polarflächen von r in Bezug auf die ersten von 2, 3, 4, also geht die 1. Polarfläche von r in Bezug auf die (n-1-1)-te oder vorletzte Polarfläche Π_x von X durch 2, 3 und 4[1]), d. h. (2 3 4) ist die Polarebene von r in in Bezug anf die vorletzte Polarfläche von X, eine Fläche 2. Gr. Nun durchläuft r die Ebene (1 3 4), mithin ist Ψ_{12} der Ort der Punkte, für deren vorletzte Polarfläche (1 3 4) zu (2 3 4) koujugiert ist. (Cremona, Mémoire (47)). Analog erhalte ich Ψ_{21} als Ort der Punkte, für deren vorletzte Polarfläche (2 3 4) zu (1 3 4) konjugiert ist, mithin sind in dem speziellen Fall tatsächlich Ψ_{12} und Ψ_{21} identisch, so dass die weiteren Schlüsse von Crémona in Mémoire (46) für derartige Flächengebüsche und vor allem die darauf gegründeten Resultate über Polarflächen von Ebenen und Geraden in „Mémoire„ (47) bis (57), auf die ich mich im weiteren Verlauf der Untersuchungen häufig stütze, richtig sind.

Die Fläche $\Psi_{21} \equiv \Psi_{12}$ hat als Erzeugnis dreier kollinearer Netze von Flächen (n-2)-ter Ordnung die Ordnung $3\,(n-2)^2$) und ist die später zu untersuchende gemischte Polarfläche der beiden Ebenen (1 3 4) und (2 3 4) in Bezug auf F^n.

Da die Sätze, aus denen die Identität $\Phi_{21} \equiv \Phi_{12}$, $\Psi_{12} \equiv \Psi_{21}$ im Spezialfall hervorgeht, bei Cremona vorkommen, so scheint mir folgende Bemerkung angemessen: Man muss aus dem 4. Kapitel des „Mémoire“ die Berechtigung für die in dem 3. Kapitel über die symmetrischen Komplexe gemachten Schlüsse herholen, was aus Cremonas Erörterungen jedenfalls nicht hervorgeht. Die blosse Voraus-

[1]) Cremona, „Grundzüge,“ (84)
[2]) Cremona, „Grundzüge,“ (127)

setzung, welche für die symmetrischen Komplexe gemacht wird: $P_{12} \equiv P_{21}$ u. s w., reicht demnach wohl für 2 Flächenbüschel, die Cremona in Nr. (42) behandelt, nicht aber für die weiteren Fälle aus. Die Netze und Gebüsche von gemischten 2. Polarflächen haben noch andere spezielle Eigenschaften, welche erst den Beweis ermöglichen. Es ist also eine Umarbeitung der beiden Kapitel III und IV notwendig, die von Herrn Prof. Dr. Sturm ausgeführt worden ist und demnächst im Crelle'schen Journal erscheinen wird.

Teil I.

Reine zweite Polarflächen von Punkten.

§ 1. Das System der reinen zweiten Polarflächen, Ausartungen und Charakteristiken.

(3) Jedem Punkt P des Raumes ist eindeutig seine zweite Polarfläche Π_P zugeordnet[1]). Nun gibt es im Raume ∞^3 Punkte, mithin wird das System der reinen zweiten Polarflächen ∞^3 Flächen umfassen, d. h. ein 3-stufiges System sein [2]). Die reine zweite Polarfläche eines Punktes in Bezug auf eine Fläche 4. Ordn., F_4, ist aber identisch mit der vorletzten oder (n-2)-ten Polarfläche desselben Punktes und in Teil I bis III werden sich die Untersuchungen vorwiegend auf ihre Eigenschaften als vorletzte Polarfläche stützen, da diese leichter zugänglich sind, während im Teil IV die Flächen wirklich als zweite Polarflächen aufgefasst werden.

Die Fläche Π_P ist eine Fläche 2. Grades und es gilt mithin der Satz: „Die reinen 2. Polarflächen aller Punkte des Raumes in Bezug auf eine F^4 bilden ein 3-stufiges System von Flächen 2. Grades, $\underset{3}{\Sigma}\, \Pi_P$ [3])."

---

[1]) Bobillier, Ann. d. Gergonne Bd. 19, Grassmann, Theorie der Centralen (Crell. Journ. Bd. 24)

[2]) Schubert, Kalkül d. abz. Germ. § 3.

[3]) Der Index unter dem Σ (System) soll stets die Stufe des Systems angeben.

(4) Für Flächen 2. Grades sind nun 3 verschiedene Ausartungen möglich:

a) der Kegel 2. Grades,
b) das Ebenenpaar und
c) die Doppelebene.[1])

(a) Die Bedingung, dass eine Fläche 2. Gr. in einen Kegel 2. Gr. ausartet, bezeichnet Schubert mit χ; es ist dies eine einfache Bedingung, mithin gibt es in einem 3 - stufigen System von Flächen 2. Gr. ∞^2 Kegel 2. Gr.; das ist auch hier der Fall:

„Die Pole der ∞^2 Kegel des Systems der reinen zweiten Polarflächen einer F^4 liegen auf ihrer Hesse'schen Fläche von der Ordnung 4 $(n-2) = 8$, die Doppelpunkte oder Spitzen dieser Kegel auf der konjugierten Kernfläche, der Steinerschen Fläche von der Ordnung 4 $(n-2)^3 = 32$[2])."

(b) Die nächste Ausartung ist das Ebenenpaar; nun gibt es unter den ∞^9 Flächen 2. Grades im Raume ∞^6 Ebenenpaare, also ist die Bedingung ψ, dass eine F^2 in ein Ebenenpaar ausartet, eine 3 - fache Bedingung[3]) und muss hier aus dem 3 stufigen System $\underset{3}{\Sigma}\, \Pi_P$ eine endliche Anzahl von Flächen ausscheiden. Das ist auch der Fall.

Denn wenn die vorletzte Polarfläche eines Punktes P ein Ebenenpaar ist, so sind alle Punkte der Schnittgerade g der beiden Ebenen Doppelpunkte der Polarfläche und liegen als solche auf der Steinerschen Fläche der F^4, mithin muss die ganze Gerade g der Steinerschen Fläche angehören. Die Steinercshe Fläche enthält aber 10 $(n-2)^3$ Geraden, und diese sind die Doppelgeraden der vorletzten Polarflächen der 10 $(n-2)^3$ Doppelpunkte der Hesse'schen Fläche, die in Ebenenpaare ausarten[3]).

„In dem System der reinen zweiten Polarflächen einer F^4 gibt es 80 Ebenenpaare, deren Pole die

---

[1]) Schubert, Kalkül d. abz. Geom, § 22.
[2]) Cremona, Mémoire (52)
[3]) Cremona, Mémoire (56)

Doppelpunkte der Hesse'schen Fläche und deren Doppelgeraden die Geraden der Steinerschen Fläche sind."

(c) Die Bedingung φ endlich, dass eine Fläche 2. Grades in eine Doppelebene ausartet, wird von keiner reinen zweiten Polarfläche der F^4 erfüllt. Das ist schon daraus zu ersehen, dass φ eine 6-fache Bedingung ist, da es nur ∞^3 Doppelebenen unter den ∞^9 Flächen 2. Grades giebt; ich kann aber den Flächen des 3-stufigen Systems $\Sigma \Pi_P$ nicht noch eine 6-fache Bedingung auferlegen.

Sollte die reine 2. oder (n-2)-te Polarfläche eines Punktes P eine Doppelebene ε sein, so müssten ja alle Punkte von ε Doppelpunkte der (n-2)-ten Polarfläche sein, also die Ebene ε müsste der Steinerschen Fläche angehören, d. h. die Steinersche Fläche müsste zerfallen in eine Ebene und eine Fläche 31. Ordnung. Da wir aber eine allgemeine Fläche 4. Ordnung voraus setzen, ist ein solches Zerfallen nicht möglich.

„In dem System der reinen 2. Polarflächen einer allgemeinen F^4 gibt es keine Doppelebenen."

Ich habe hier die Bedingung ψ und φ nicht ganz in demselben Sinne wie Schubert aufgefasst; denn bei ihm sind auch ψ und φ einfache Bedingungen, da er die Fläche 2. Grades nicht nur als Ordnungsfläche, sondern zugleich auch als Rang- und Klassenfläche betrachtet, wobei die Doppelebene als Ebene eines Klassenkegelschnitts, das Ebenenpaar zugleich auch als Punktepaar[1]) auftritt, so dass jede Doppelebene in dem hier gebrauchten Sinne entsprechend den in ihr liegenden ∞^5 Kegelschnitten für ∞^5 Schubert'sche Ausartungen φ und jedes Ebenenpaar entsprechend den auf der Schnittgerade liegenden ∞^2 Punktepaaren für ∞^2 Ausartungen ψ rechnet. Da es sich nun hier in erster Linie um Ordnungsflächen handelt, müssen Doppelebene und Ebenenpaar als Ausartungen solcher auf-

[1]) Schubert, Kalkül d. abz. Germ. § 12

treten und stellen dann ∞^5 bezw, ∞^2 Ausartungen φ und ψ im Schubert'schen Sinne dar, woraus noch einmal hervorgeht, dass Doppelebenen in dem 3 - stufigen System garnicht, Ebenenpaare nur in endlicher Anzahl vorkommen.

Trotz dieser Abweichung kann ich die von Schubert gebrauchten Formeln für Ausartungen der Fläche 2. Grades:

$$(\alpha) \quad 2\mu - \nu = \varphi \text{ [1]}$$
$$(\beta) \quad 2\rho - \nu = \chi \text{ [1]}$$
$$(\gamma) \quad 2\gamma - \mu - \rho = \psi \text{ [2]}$$

auch hier anwenden; denn tritt eine Ausartung φ oder ψ im Schubertschen Sinne auf, so kann ich auch auf das Vorhandensein einer Doppelebene oder eines Ebenenpaares als Ordnungsfläche schliessen.

(5) Das System der reinen 2. Polarflächen ist 3 - stufig, die Bedingung also, dass eine Fläche 2. Grades ihm angehört, ist 6 - fach. Füge ich nun zu ihr noch 3 einfache Bedingungen hinzu, so wird durch diese eine endliche Anzahl von Flächen aus $\Sigma_3 \Pi_P$ bestimmt. Die Elementar-Bedingungen für eine Fläche F^n sind nun:

μ, dass F^n durch einen gegebenen Punkt geht,
ν, dass F^n eine gegebene Gerade und
ρ, dass F^n eine gegebene Ebene berührt.

Die Bedingung ν ist erfüllt, wenn F^n mit der Gerade zwei unendlich nahe Punkte gemein hat, die Bedingung ρ, wenn sie von der Ebene in einer Kurve mit Doppelpunkt, hier also bei F^2 in einem Geradenpaar geschnitten wird.

Die 3 einfachen Bedingungen μ, ν, ρ kann ich zu 10 dreifachen zusammensetzen: μ^3, $\mu^2\nu$, $\mu^2\rho$, $\mu\nu\rho$, $\mu\nu^2$, $\mu\rho^2$, ν^3, $\nu^2\rho$, $\nu\rho^2$, ρ^3, und die Anzahlen nun von reinen zweiten Polarflächen, welche durch je eine der 10 dreifachen Bedingungen aus $\Sigma_3 \Pi_P$ ausgesondert werden, sind die 10 Charakteristiken des Systems der reinen 2. Polarflächen aller Punkte in Bezug auf F^4.

---

[1]) Chasles, Comptes rendus L X I pag. 396.
[2]) Zeuthen, Overs ov. K. Selsk. Forh. 1866.

§ 2. Das System der reinen zweiten Polarflächen, deren Pole eine Punktreihe durchlaufen.

(6.) Es ist gegeben eine Gerade g, auf der die Pole P liegen sollen. Die Gerade g enthält ∞^1 Punkte, mithin bilden die reinen zweiten Polarflächen ihrer Punkte ein 1-stufiges System von Flächen Π_P, dass ich mit $\Sigma_1 \Pi_P$ bezeichnen will.

Aus diesem einstufigen System wird durch jede weitere einfache Bedingung eine endliche Anzahl von Flächen bestimmt, und zwar habe ich für $\Sigma_1 \Pi_P$ die Charakteristiken μ, ν, ϱ und χ zu berechnen.

(7) Es gilt der Satz; Soll O ein Punkt der i-ten Polarfläche von P in Bezug auf F^n sein, so muss P auf der (n-i)-ten Polarfläche von O liegen[1]). Soll nun die 2. oder vorletzte Polarfläche von P in Bezug auf F^4 durch einen gegebenen Punkt O gehen, so muss ihr Pol P auf der 2. Polarfläche Π_O von O liegen, und ausserdem noch, da hier die Pole P die Punktreihe g durchlaufen, auf g. Π_O und g aber haben 2 Punkte gemein, mithin gehen 2 Flächen des Systems $\Sigma_1 \Pi_P$ durch O; es ist $\mu = 2$.

(8) Als nächste Anzahl ist ν zu berechnen, die Zahl der Flächen aus $\Sigma_1 \Pi_P$, welche eine gegebene Gerade l berühren.

Jede der ∞^1 Flächen des Systems schneidet l in 2 Punkten; wenn diese beiden Punkte sich vereinigen, berührt die betreffende Fläche die Gerade l.

Durch jeden Punkt X von l gehen nach (7) 2 Flächen des Systems $\Sigma_1 \Pi_P$, und diese schneiden l ausser in X noch in 2 Punkten[1] X′, die ich dem Punkte X zuordne. Jedem dieser Punkte X′ lasse ich dann wieder die 2 weiteren Schnittpunkte der beiden durch ihn gehenden Flächen entsprechen. Die Zuordnung geschieht beidemal auf dieselbe Weise, ich erhalte also auf l eine involutorische Korrespon-

---

[1]) Cremona, „Grundzüge“ (62)

denz [2] mit 4 Koïnzidenzen. In jedem dieser 4 Koïnzidenzpunkte vereinigt sich der eine Schnittpunkt X einer Fläche Π_P mit dem zweiten X′, sodass diese Fläche mit l zwei unendlich nahe Punkte gemein hat oder nach (5) die l berührt; also ist „$\nu = 4$.“

(9) Verallgemeinere ich dieses Resultat, indem ich g alle Geraden des Raumes durchlaufen lasse, so finde ich, dass es auf jeder Geraden 4 Punkte gibt, deren reine 2-te Polarflächen in Bezug auf F^4 die Gerade l berühren; mithin erfüllen alle diese Punkte eine Fläche 4. Ordnung; und ich kann den Satz aufstellen:

„Die Pole aller reinen 2. Polarflächen einer F^4, welche eine gegebene Gerade l berühren, liegen auf einer Fläche 4. Ordnung, der [reinen] Polarfläche Π_l dieser Geraden.“

Das stimmt überein mit dem von Cremona gefundenen Resultat, dass der Ort der Punkte, deren vorletzte Polarfläche in Bezug auf F^n eine Gerade berühren, eine Fläche von der Ordnung 2 (n-2), hier also 4, ist.[1]).

Diese Fläche Π_l erhalte ich folgendermassen für eine F^n:

Es ist die Gerade l gegeben; auf ihr lege ich 2 Punkte 1 und 2 fest, deren 1. Polarflächen in Bezug auf F^n P_1 und P_2 sein mögen; dann bilde ich die 1. Polarflächen aller Punkte r von l in Bezug auf P_1 und P_2 und erhalte durch sie zwei Flächenbüschel von der Ordnung n-2[2]). Diese beiden Büschel sind projektiv, indem sich die 1. Polarflächen P_{1r} und P_{2r} eines Punktes r in Bezug auf P_1 und P_2 entsprechen, und bilden einen symmetrischen Komplex 1. Stufe[3]), da $P_{12} \equiv P_{21}$ ist[4]). Mithin erzeugen die beiden Büschel eine Fläche von der Ordnung 2 (n-2) mit $(n-2)^3$ Doppelpunkten[3]), welche die gesuchte Π_l ist.

---

[1]) Cremona, „Mémoire“ (48)
[2]) „ , „Grundzüge“ (85)
[3]) „ , „Mémoire“ (42)
[4]) „ , „Grundzüge“ (83)

Denn Π_1 ist das Erzeugnis zweier projektiver Büschel von gemischten zweiten Polarflächen genau wie Φ_{12} in (1) der Einleitung, nur dass hier r auf derselben Gerade liegt wie die beiden anderen Punkte. Daraus folgt wie dort, dass die Polarebene von r in Bezug auf die vorletzte Polarfläche eines Punktes X[1]) auf Π_1 durch (12) oder l und damit auch durch r selbst geht. Wenn aber die Polarebene eines Punktes in Bezug auf eine Fläche durch den Punkt selbst geht, so muss der Punkt auf der Fläche liegen und die Ebene in ihm Tangentialebene sein. Die reine vorletzte Polarfläche von X[1]) geht also durch r und hat in r eine Tangentialebene, die durch l geht, mithin berührt sie l in r. Somit haben die Punkte der Fläche Π_1 die Eigenschaft, dass ihre (n-2)-ten Polarflächen die l berühren, und zwar berühren in jedem Punkt r die ∞^1 vorletzten Polarflächen, deren Pole auf der Schnittkurve von P_{1r} und P_{2r} liegen, die ja unverändert bleibt, wenn ich die Punkte 1 und 2 auf l verschiebe, da alle Flächen P_{sr}, wenn r festbleibt, einen Büschel bilden, dessen Grundkurve hier in Frage kommt, und diese Grundkurven für alle r erfüllen Π_1, so dass es auch für Π_1 gleichgültig ist, welche Punkte von l ich als 1 und 2 wähle. Spezializiere ich dies Resultat, für die F^4, so erhalte ich:

„Die vorhin gefundene [reine] Polarfläche Π_1 ist von der Ordnung 4 und hat 8 Doppelpunkte."

(10) Die Anzahl ρ der Flächen des Systems $\Sigma\,\Pi_P$, welche eine gegebene Ebene ε berühren, d. h. in einem Geradenpaar schneiden, ist noch zu bestimmen.

$\Sigma\,\Pi_P$ ist ein einstufiges System von Flächen 2. Grades aus dem 2 Flächen durch einen Punkt gehen, und dann 4 Flächen eine Gerade berühren (8); ich will das jetzt verallgemeinern, indem ich ein System 1. Stufe von Flächen 2. Grades nehme, aus dem ϑ Flächen durch einen gegebenen Punkt gehen, ein einstufiges System mit dem Index

---

[1]) Wenn X auf der Polarkurve (P_1r, P_2r), die zu r gehört, liegt.

ϑ, wobei ich den Index eines Systems k-ter Stufe folgendermassen definiere:

„Der Index eines Systems k-ter Stufe von Flächen ist die Anzahl der Flächen, die durch k-Punkte gehen."

Den Index werde ich als Zahl über dem System $\overset{\vartheta}{\Sigma}$ angeben.

Ich nehme also an, es liegt ein System $\overset{\vartheta}{\underset{1}{\Sigma}} F^2$ vor; dann gehen durch jeden Punkt einer Geraden l ϑ Flächen 2. Grades des Systems, welche l in ϑ weiteren Punkten X′ schneiden jedem dieser Punkte X′ sind in derselben Weise ϑ Punkte X zugeordnet. Es entsteht so eine involutorische Korrespondenz $[\vartheta]$ auf l, deren 2ϑ Koïnzidenzpunkte Schnittpunkte ein und derselben Fläche in sich vereinigen, so dass es 2ϑ-mal vorkommt, dass Flächen des Systems 1. Stufe mit dem Index ϑ eine geg. Gerade berühren. Für dieses System ist also $\nu = 2\vartheta$. Um ρ zu berechnen, schneide ich das System der F^2 mit ε und erhalte in ε ein einstufiges System von Kegelschnitten, aus dem ϑ durch einen Punkt von ε gehen und 2ϑ eine Gerade von ε berühren. Für dieses System von K^2 sind mithin die Schubert'schen Charakteristiken [1])

μ', dass die Ebene von K^2 durch einen geg. Punkt gehe,

ν', dass K^2 eine Gerade g des Raumes treffe,

ρ', dass K^2 eine Ebene η des Raumes berühre, bekannt. Es ist $\mu' = 0$, da alle K^2 in ε liegen, ν' die Anzahl der K^2, welche durch den Schnittpunkt von g mit ε gehen, also ϑ und ρ', die Anzahl der K^2, welche die Schnittgerade (ε, η) berühren, also 2ϑ.

Wende ich jetzt die Schubert'schen Formeln für Ausartungen der K^2 an [2]), so finde ich, dass in dem System $\eta = 2\nu' - \rho' - 2\mu' = 2\vartheta - 2\vartheta = 0$ Doppelgeraden und

---

[1]) Schubert, Kalkül der abz. Geom. § 20.

[2]) Schubert, Kalkül d. abz. Geom. § 20, Formel 1) und 2)

$\delta = 3\rho' - \nu' = 3\vartheta$ Geradenpaare enthalten sind. Also berühren 3ϑ Flächen 2. Gerades aus dem System $\sum_1^{\vartheta} F^2$ die Ebene ε.

„Liegt ein 1-stufiges System von Flächen 2. Grades mit dem Index ϑ ohne Ebenenpaar vor, so berühren aus ihm 2ϑ Flächen eine geg. Gerade und 3ϑ eine gegebene Ebene."

(11) In dem vorliegenden Fall ist $\vartheta = 2$, denn durch einen Punkt gehen ja 2 Flächen des Systems $\sum_1 \Pi_P$ (8), mithin ist $\nu = 4$, wie bereits gefunden, und $\rho = 6$, so dass 6 Flächen des Systems die Ebene ε berühren.

Die Gerade g nun habe ich beliebig im Raume angenommen, mithin gibt es auf jeder Geraden des Raumes 6 Punkte, deren reine vorletzte Polarflachen eine geg. Ebene ε berühren, und alle diese Punkte werden mithin eine Fläche 6. Ordnung erfüllen.

„Der Ort der Punkte, deren reine vorletzte Polarflächen in Bezug auf F^4 eine gegebene Ebene ε berühren, ist eine Fläche 6. Ordnung die [reine] Polarfläche Π_ε von ε in Bezug auf F^4."

Das stimmt wieder überein mit dem Satz von Cremona, nach dem die ebenso definierte Fläche bei einer Grundfläche n-ter Ordnung von der Ordnung $3(n-2)$ ist.[1])

Diese Fläche kann ich ganz ähnlich erzeugen wie Π_1 in (9).

Ich lege in der Ebene ε die Punkte 1, 2, 3 fest und bilde für alle Punkte r von ε die ersten Polarflächen P_{1r}, P_{2r}, P_{3r} in Bezug auf P_1, P_2, P_3, die ersten Polarflächen von 1, 2, 3. Ich erhalte so 3 Netze von Flächen (n-2)ter Ordnung[2]), die kollinear bezogen sind, indem sich P_{1r}, P_{2r}, P_{3r} für einen bestimmten Punkt r entsprechen, und die einen symmetrischen Komplex 2. Stufe bilden,[3]) da ja $P_{23} \equiv P_{32}$

---

[1]) Cremona, „Mémoire" (47)
[2]) „ , „Grundzüge" (87)
[3]) „ , „Mémoire" (43)

$P_{31} \equiv P_{13}$ und $P_{12} \equiv P_{21}$ ist[1]). Diese 3 Netze erzeugen eine Fläche von der Ordnung 3 (n-2) und mit 4 $(n-2)^3$ Doppelpunkten, da das Resultat aus „Memoire“ (43) für diesen Fall, wie in (1) gezeigt, richtig ist.

Die hier erzeugte Fläche ist nun $\Pi\varepsilon$; denn sie entsteht ganz ähnlich wie Ψ_{12} in (2) als Erzeugnis von 3 kollinearen Netzen. Nehme ich jetzt einen Punkt X auf ihr, so gehen durch ihn P_{1r}, P_{2r} und P_{3r}, und daraus folgt wie in (2), dass die Polarebene von r in Bezug auf die (n-2)-te Polarfläche von X die Ebene $(1\,2\,3) = \varepsilon$ ist, in der hier auch r liegt. Folglich berührt die Ebene ε die vorletzte Polarfläche von X in r und die erhaltene Fläche ist somit der gesuchte Ort Π_ε.

Da nun P_{1r}, P_{2r}, und P_{3r} im ganzen $(n-2)^3$ gemeinsame Punkte besitzen, die sämtlich auf Π_ε liegen, kann ich schliessen, dass in jedem Punkt r von ε $(n-2)^2$ vorletzte Polarflächen die Ebene ε berühren, und die $(n-2)^3$ Pole dieser vorletzten Polarflächen sind die Grundpunkte des Netzes, das ich erhalte, wenn ich in Bezug auf die 1. Polarfläche von r die 1. Polarflächen aller Punkte von ε bilde. Für die F^4 gilt also:

„Π_ε, die [reine] Polarfläche der Ebene ε, ist von der Ordnung 6 und hat 32 Doppelpunkte.“

(11) Die Anzahl χ der Kegel 2. Grades in diesem System ist leicht zu berechnen. Ihre Pole müssen einmal auf der Gerade g, ausserdem aber auf der Hesse'schen Fläche H 8. Ordnung der F^4 liegen, mithin ist $\chi = 8$.“

Dies wird bestätigt, wenn ich die Relationen (α), (β), (γ) aus (4) anwende. Berechne ich χ aus (β), so erhalte ich

$$\chi = 2\rho - \nu = 12 - 4 = 8,$$

aus (α) und (γ) aber finde ich

$$\varphi = 2\mu - \nu = 4 - 4 = 0 \text{ und}$$
$$\psi = 2\nu - \mu - \rho = 8 - 2 - 6 = 0.$$

Die Anzahl der Doppelebenen und Ebenenpaare muss ja auch 0 sein, da ich den Flächen des einstufigen Systems nicht

---

[1]) Crémona, „Grundzüge“ (83)

noch eine 6-fache (φ) bezw. 3-fache (ψ) Bedingung auferlegen kann.

Es könnte aber der Fall eintreten, dass die Gerade g durch einen Doppelpunkt der H ginge; dann enthält das System ein Ebenenpaar, und es ist $\psi = 1$; aber χ wird dadurch auf 6 erniedrigt, da g ausser dem Doppelpunkt nur noch 6 Punkte mit H gemeinsam hat. Dann ist nach den Relationen [1]):

$$\mu = 1/4\ (3\varphi + \chi + 2\psi),$$
$$\nu = 1/4\ (2\varphi + 2\chi + 4\psi) \text{ und}$$
$$\rho = 1/4\ (\varphi + 3\chi + 2\psi \text{ ebenso},$$

wie vorher $\mu = 2$ und $\nu = 4$, dagegen $\rho = 1/4\ (6+18+2) = 5$, und diese Abnahme der Anzahl ρ um 1 erklärt sich daraus, dass das Ebenenpaar des Systems alle Ebenen des Raumes in einem Geradenpaar schneidet, d. h. alle Ebenen berührt.

Eine gegebene Ebene ε wird also von dem Ebenenpaar und 5 anderen von der Ebene abhängigen Flächen des Systems berührt, mithin ebenso wie vorher von 6 Flächen.

In dem System der reinen 2. Polarflächen einer F^4, deren Pole eine gegebene Punktreihe durchlaufen, gibt es:

2 Flächen, die durch einen geg. Punkt gehen
4 „ , die eine geg. Gerade,
6 „ , die eine geg. Ebene berühren und
8 „ , die in Kegel 2. Grades ausarten.

§ 3. Das System der reinen 2. Polarflächen, deren Pole ein Punktfeld durchlaufen.

(13) Es ist eine Ebene ε gegeben; sie enthält ∞^2 Punkte, und lasse ich P die Ebene durchlaufen, so erhalte ich ein 2-stufiges System von 2 Polarflächen Π_P, das ich mit $\Sigma\, \Pi_P$ bezeichne. In ihm sind die zu bestimmenden
2
Anzahlen:

$$\mu^2,\ \mu\nu,\ \mu\rho,\ \nu^2,\ \nu\rho \text{ und } \rho^2.$$

---

[1]) Schubert, Kalk. d. abz. Germ. § 22.

Um die Werte dieser Charakteristiken zu berechnen habe ich die Ebene ε immer mit 2 der in (7), (9), (11), beschriebenen zu Punkt, Gerade und Ebene gehörigen Oreter zu schneiden und die Anzahl der gemeinsamen Punkte festzustellen, nach dem Satze: „3 Flächen von der Ordnung n_1, n_2, n_3 haben immer $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ gemeinsame Punkte."

Nehme ich die reinen 2. Polarflächen zweier gegebener Punkte O_1 und O_2 so haben diese mit ε 4 Punkte gemein, also ist $\mu^2 = 4$.

$\mu\nu$ ist die Anzahl der Schnittpunkte von ε mit der zweiten Polarfläche[1]) des geg. Punktes O und der Polarfläche[1]) der geg. Gerade g, also ist

$$\mu\nu = 2 \cdot 4 = 8.$$

Ebenso erhalte ich die übrigen Anzahlen:

$$\mu\rho = 2 \cdot 6 = 12,$$
$$\nu^2 = 4 \cdot 4 = 16,$$
$$\nu\rho = 4 \cdot 6 = 24 \text{ und}$$
$$\rho^2 = 6 \cdot 6 = 36.$$

Aus $\mu^2 = 4$ hätte ich die weiteren Zahlen auch mit Hülfe des Satzes (10) berechnen können. Die Bedingung μ sondert ein 1-stufiges System aus, mit dem Index $\vartheta = 4$, da durch einen 2. geg. Punkt 4 Flächen gehen, die auch μ erfüllen. In diesem einstufigen System ist dann $\nu = 2 \cdot \vartheta = 8$, $\rho = 3 \cdot \vartheta = 12$, also $\mu^2 = 4$, $\mu\nu = 8$, $\mu\rho = 12$.

Aus $\mu\nu = 8$ folgt dann in derselben Weise $\nu^2 = 2 \cdot 8 = 16$, $\nu\rho = 3 \cdot 8 = 24$, und aus $\mu\rho = 12$ folgt $\nu\rho = 2 \cdot 12 = 24$ und $\rho^2 = 3 \cdot 12 = 36$, da es sich ja hier um Flächen 2. Grades handelt.

(14) In dem vorliegenden 2-stufigen System gibt es ∞^1 Kegel 2. Grades, deren Pole auf der Schnittkurve der Ebene ε mit H, also auf einer ebenen Kurve 8. Ordnung liegen. Die Spitzen dieser Kegel erfüllen dann eine Raumkurve 24. Ordnung.

---

[1]) Die Bezeichnung „reine" Polarfläche kann ich bei einem Punkt, einer Geraden, einer Ebene als überflüssig weglassen.

Die Kurve der Kegelspitzen muss ja auf der Steinerschen Fläche S liegen und der Kurve der Pole auf H entsprechen. Nun entspricht aber der Schnittkurve der Hessischen Fläche mit einer beliebigen Fläche m-ter Ordnung auf der Steinerschen Fläche eine Kurve von der Ordnung $6\,m\,(n-2)^2$,[1]) also hier dem Schnitt von H mit ε, wo $m=1$ und $n=4$ ist, eine Kurve 24. Ordnung auf S.

Die Anzahl der Kegelspitzen, die in eine Ebene fallen, ist danach 24. Wenn aber die Spitze eines Kegels 2. Grades in eine Ebene fällt, so schneidet diese den Kegel in einem Geradenpaar, d. h. berührt ihn im weiteren Sinne, und wenn eine Ebene im weiteren Sinne einen Kegel 2. Grades berühren soll, so muss seine Spitze in ihr liegen; also ist 24 zugleich die Anzahl $\chi\rho$ der Kegel des Systems, die eine Ebene im weiteren Sinne berühren. Berechne ich aber diese Anzahl mit Hilfe der Formel (β) in (4), so ist

$$\chi\rho = (2\rho-\nu)\ \rho = 72-24 = 48.$$

Danach müssten 48 Spitzen der Kegel des Systems $\underset{2}{\Sigma}\,\Pi_P$ in eine Ebene fallen, die Kurve also 48. Ordnung sein. Doch dieser Widerspruch klärt sich auf, wenn ich berücksichtige, dass die Pole deren reine (n-2)-te Polarflächen eine Ebene η berühren und in Kegel ausarten, auf $\Pi\eta$ und auf H liegen müssen. Diese beiden Flächen 6. und 8. Ordnung haben mit ε wohl 48 Punkte gemein, aber von diesen 48 Punkten vereinigen sich je 2, weil die Polarfläche der Ebene η die Hessische Fläche nicht in einer Kurve 48. Ordnung schneidet, sondern längs einer Kurve 24. Ordnung berührt[1]). Es gibt also in der Tat nur 24 Kegel 2. Grades in dem System $\underset{2}{\Sigma}\,\Pi_P$, die eine Ebene η berühren, d. h. deren Spitze in η fällt; jeder dieser Kegel aber zählt doppelt, also auch jede der Kegelspitzen, so dass die Kurve der Kegelspitzen zwar von der Ordnung 24 ist, aber doppelt durchlaufen wird.

---

[1]) Cremona, „Grundzüge“ (158). „Mémoire“ (47).

Die Anzahl $\chi\rho$ ist mithin $2 \cdot 24$, und dies Resultat findet seine Bestätigung in dem Satze, dass jeder Kegel, der die Bedingung ρ erfüllt, dessen Spitze also in einer gegebenen Ebene liegt, für die Berührung doppelt zählt, in der Anzahl $\chi\rho$ mithin doppelt zu rechnen ist, wie auch ferner jeder Kegel, der ρ^2 bezw. ρ^3 erfüllt, 4 bezw. 8 Kegel repräsentiert[1]).

Es ist noch die Anzahl der Kegel des Systems zu bestimmen, die durch einen Punkt gehen bezw. eine Gerade berühren.

Die Pole der Kegel, die durch P gehen, müssen auf der 2. Polarfläche von P, auf H und in ε liegen, also ist $\chi\mu = 16$. Dieselbe Zahl erhalte ich bei Anwendung der Formel (β)

$$\chi\mu = (2\rho\ \nu)\ \mu = 24 - 8 = 16.$$

Die Anzahl der Kegel, welche eine Gerade l berühren, ist $8 \cdot 4 \cdot 1 = 32$ oder $\chi\nu = (2\rho\text{-}\nu)\ \nu = 48 - 16 = 32$.

Die Anzahlen für Doppelebenen und Ebenenpaare, die ich mit Hülfe von Formel (α) und (γ) berechnen kann, sind sämtlich 0:

$$\varphi\mu = (2\mu\text{-}\nu)\ \mu = 8\text{-}8 = 0,$$
$$\varphi\nu = (2\mu\text{-}\nu)\ \nu = 16\text{-}16 = 0,$$
$$\varphi\rho = (2\mu\text{-}\nu)\ \rho = 24\text{-}24 = 0,$$

und

$$\psi\mu = (2\nu\text{-}\mu\text{-}\rho)\ \mu = 16\text{-}4\text{-}12 = 0,$$
$$\psi\nu = (2\nu\text{-}\mu\text{-}\rho)\ \nu = 32\text{-}8\text{-}24 = 0,$$
$$\varphi\rho = (2\nu\text{-}\mu\text{-}\rho)\ \rho = 48\text{-}12\text{-}36 = 0.$$

Doppelebenen und Ebenenpaare können ja auch hier nicht vorhanden sein, da das System 2 - stufig, die Bedingungen φ und ψ aber 6 - bezw. 3 - fach sind.

(15) Wenn ich die Ergebnisse zusammenfasse, erhalte ich folgenden Satz:

„Die reinen zweiten Polarflächen der Punkte einer Ebene in Bezug auf F^4 bilden ein 2-stufiges System von Flächen 2. Grades mit den Charakteristiken:

---

[1]) Zeuthen, Nouv. Ann. 2. S. Bd. VII. (387).

$\mu^2 = 4$, $\mu\nu = 8$, $\mu\rho = 12$, $\nu^2 = 16$, $\nu\rho = 24$, $\rho^2 = 36$

Ausserdem enthält das System ein einstufiges System von Kegeln 2. Grades, deren Spitzen eine Raumkurve 24. Ordnung durchlaufen und von denen 16 durch einen Punkt gehen und 32 eine Gerade berühren."

§ 4. System der reinen zweiten Polarflächen aller Punkte des Raumes.

(16) Lasse ich P den ganzen Raum durchlaufen, so erhalte ich das 3-stufige System $\underset{3}{\Sigma}\,\Pi_P$ (3), welches ∞^4 Systeme $\underset{1}{\Sigma}\,\Pi_P$ und ∞^3 Systeme $\underset{2}{\Sigma}\,\Pi_P$ enthält.

Will ich die 10 Charakteristiken dieses Systems berechnen, so brauche ich nur die Anzahl der gemeinsamen Punkte von je drei der in (7), (9), (11) gefundenen Oerter Π_0, Π_1, Π_η, die zu Punkt, Gerade und Ebene gehören, festzustellen, wobei ich die Tripel aus den Flächen Π_0, Π_1, Π_η ganz analog den Tripeln aus μ, ν, ρ, zusammensetze.

So erhalte ich die 10 Charakteristiken:

$$\mu^3 = 2^3 = 8,$$
$$\mu^2\nu = 2^2.4 = 16,$$
$$\mu^2\rho = 2^2.6 = 24,$$
$$\mu\nu^2 = 2.4^2 = 32,$$
$$\mu\nu\rho = 2.4.6 = 48,$$
$$\mu\rho^2 = 2.6^2 = 72,$$
$$\nu^3 = 4^3 = 64,$$
$$\nu^2\rho = 4^2.6 = 96,$$
$$\nu\rho^2 = 4.6^2 = 144 \text{ und}$$
$$\rho^3 = 6^3 = 216;$$

bei der letzten Anzahl muss ich eine Einschränkung machen; denn die reinen Polarflächen aller Punkte des Raumes gehen durch die 80 Doppelpunkte der Hesse'schen Fläche [1]), diese gehören also stets zu den gemeinsamen Punkten der reinen Polarflächen

[1]) Cremona, „Mémoire" (47).

von 3 gegebenen Ebenen; die reinen zweiten Polarflächen aber dieser 80 Doppelpunkte sind Ebenenpaare[1]), welche alle Ebenen des Raumes berühren; sie ändern sich nicht, wenn ich die gegebenen Ebenen ändere, folglich muss ich 80 von der Anzahl der Flächen, die 3 gegebene Ebenen berühren, abziehen und erhalte

$$\rho^3 = 136 \ (+ \ 80 \text{ Ebenenpaare}).$$

(17.) Das System $\sum_3 \Pi_P$ enthält, wie in (4a) gesagt ∞^2 Kegel 2. Gerades, deren Pole bezw. Spitzen die Hesse'sche Fläche H bezw. die Steinersche S erfüllen.

Ich will die Anzahlen dieses 2-stufigen Systems von Kegeln bestimmen und auch die einstufigen Systeme betrachten, die durch einen Punkt gehen oder eine Gerade bezw. Ebene berühren.

(a) Die Anzahl der Kegel, die durch 2 gegebene Punkte O_1 und O_2 gehen, $\chi\mu^2$, ist die Zahl der gemeinsamen Punkte von ΠO_1, ΠO_2 und H, also $2.2.8 = 32$.

Diese Anzahl wird bestätigt, wenn ich die Formel (β) aus (4) anwende, die mir liefert:

$$\chi\mu^2 = 2\,\mu^2\rho \ - \ \mu^2\nu = 48 \ - \ 16 = 32.$$

(b) Gebe ich mir nun einen Punkt 0, so gibt es ∞^1 Kegel, die durch ihn gehen und dem System $\sum_3 \Pi_P$ angehören. Die Pole dieser Kegel durchlaufen die Schnittfläche 16. Ordnung von Π_0 und H, die Spitze aber die entsprechende Kurve auf der Steinerschen Fläche von der Ordnung $6.m.(n-2)^2 = 6.2.4 = 48$[2]). Das müsste wiederum die Anzahl der Kegel sein, die durch 0 gehen und eine Ebene η berühren (nach den Ausführungen in (14); diese Anzahl aber ist

$$\chi\mu\rho = 2\mu\rho^2 \ - \ \mu\nu\rho = 144 \ - \ 48 = 96.$$

Der Widerspruch zwischen diesen beiden Zahlen klärt sich wieder dadurch auf, dass jeder Kegel, der die Bedingung ρ erfüllt, doppelt zählt, oder daraus, dass Π_η die H längs einer Kurve 24. Ordnung berührt[3]), deren 48 gemeinsame

[1]) Cremona, „Mémoire“ (56).
[2]) Cremona, Mémoire, (57)
[3]) „ , „ , (47)

Punkte mit Π_0 dann doppelt zählen. Dadurch kommt die Anzahl $\chi\mu\rho = 2.48 = 96$ zustande, während die Ordnung der Kurve 48 bleibt.

Die Anzahl der Kegel, die durch O gehen und eine Gerade l berühren ist, da H, Π_l und Π_0 $8.4.2 = 64$ gemeinsame Punkte haben,

$$\chi\mu\nu = 64 = 2\,\mu\nu\rho - \mu\nu^2 = 96 - 32.$$

(c) Gebe ich mir 2 Geraden l_1 und l_2, so ist die Anzahl der Kegel, die sie berühren, $8.4.4 = 128$, was auch durch die Formel (β) aus (4) bestätigt wird, wonach

$$\chi\nu^2 = 2\nu^2\rho - \nu^3 = 192 - 64 = 128 \text{ ist.}$$

Betrachte ich das einstufige System von Kegeln aus $\sum_3 \Pi_P$, die eine geg. Gerade l berühren, so erfüllen ihre Pole die Schnittkurve 32. Ordnung von H und Π_l, die Spitzen die entsprechende Kurve von der Ordnung $6.4.2^2 = 96$ auf S.

Die Anzahl der Kegel, welche die Gerade l und eine Ebene η_l berühren, ist mithin $\chi\nu\rho = 2.96$ und stimmt überein mit der Zahl, die Formel (β) aus (4) liefert, nämlich $\chi\nu\rho = 2\nu\rho^2 - \nu^2\rho = 288 - 96 = 192$.

(d) Es bleibt noch zu berechnen die Anzahl der Kegel, welche 2 Ebenen η_{l_1} und η_{l_2} berühren; sie ist $6.6.8 = 288$. Nun gehen aber die Polarflächen $\Pi\eta_{l_1}$ und $\Pi\eta_{l_2}$ wie die reinen Polarflächen aller Ebenen durch die 80 Doppelpunkte von H, und diese rechnen mithin für 160 gemeinsame Punkte von $\Pi\eta_{l_1}$, $\Pi\eta_{l_2}$ und H, so dass noch 128 weitere Punkte übrig bleiben, von denen sich auch wieder noch je 4 vereinigen, da $\Pi\eta_{l_1}$ und $\Pi\eta_{l_2}$ die H berühren, also jeder gemeinsame Punkt für 4 Durchschnittspunkte zählt[1]), mithin ist $\chi\rho^2 = 4.32$.

Berechne ich die Anzahl mit Hülfe von (β), so darf ich als Anzahl ρ^3 nur 136 nehmen, da ja die Ebenenpaare ausgeschaltet sind, nnd ich erhalte

$$\chi\rho^2 = 2\rho^3 - \nu\rho^2 = 272 - 144 = 128.$$

Diese Anzahl ist aber auch als 4.32 aufzufassen, da jeder Kegel, der ρ^2 erfüllt, in der Anzahl 4-fach zählt (14).

[1]) Cremona, „Grundzüge“ (21)

Betrachte ich die ∞^1 Kegel, welche eine Ebens η berühren, so ist die Kurve der Pole die Berührungskurve 24. Ordnung zwischen $\Pi\eta$ und H, die der Spitzen auf S hat dann die Ordnung $6.6.4 = 144$. Da aber jene Kurve auf H durch die 80 Doppelpunkte geht, muss diese die 80 entsprechenden Geraden[1]) auf S enthalten, und diese muss ich ausschalten, weil sie von den Doppelpunkten der Ebenenpaare erfüllt werden. Dadurch erniedrigt sich die Ordnung der Kurve der Kegelspitzen zunächst auf 64, ferner aber ist die Kurve auf H, in der $\Pi\eta$ schneidet, die doppelt-zählende Berührungskurve, und daher muss auch die entsprechende Kurve 64. Ordnung auf S aus 2 zusammenfallenden Kurven 32. Ordnung bestehen. Die Ordnung der Kurve der Kegelspitzen ist also 32, und diese Zahl stimmt überein mit $\chi\rho^2 = 4.32$.

(e) Berechne ich nun die Anzahl der Ebenenpaare, welche μ^2, $\mu\nu$, $\mu\rho$, ν^2 und $\nu\rho$ genügen, so erhalte ich jedesmal 0. Denn es ist nach (γ) aus (4.):

$$\psi\mu^2 = 2\mu^2\nu - \mu^3 - \mu^2\rho = 32 - 8 - 24 = 0,$$
$$\psi\mu\nu = 2\mu\nu^2 - \mu^2\nu - \mu\nu\rho = 64 - 16 - 48 = 0,$$
$$\psi\mu\rho = 2\mu\nu\rho - \mu^2\rho - \mu\rho^2 = 96 - 24 - 72 = 0,$$
$$\psi\nu^2 = 2\nu^3 - \mu\nu^2 - \nu^2\rho = 128 - 32 - 96 = 0,$$
$$\psi\nu\rho = 2\nu^2\rho - \mu\nu\rho - \nu\rho^2 = 192 - 48 - 144 = 0.$$

Dieses Resultat war zu erwarten, da es ja in dem ganzen System nur eine endliche Anzahl von Ebenenpaaren gibt; doch diese berühren jede beliebige Ebene, und darum erhalte ich für $\psi\rho^2$ den Wert 80; denn es ist

$$\psi\rho^2 = 2\nu\rho^2 - \mu\rho^2 - \rho^3 = 288 - 72 - 136 = 80.$$

Die Anzahlen für Doppelebenen sind stets 0:

$$\varphi\mu^2 = 2\mu^3\text{-}\mu^2\nu = 16\text{-}16 = 0,$$
$$\varphi\mu\nu = 2\mu^2\nu\text{-}\mu\nu^2 = 32\text{-}32 = 0,$$
$$\varphi\mu\rho = 2\mu^2\rho\text{-}\mu\nu\rho = 48\text{-}48 = 0,$$
$$\varphi\nu^2 = 2\mu\nu^2\text{-}\nu^3 = 64\text{-}64 = 0,$$
$$\varphi\nu\rho = 2\mu\nu\rho\text{-}\nu^2\rho = 96\text{-}96 = 0$$
$$\text{und } \varphi\rho^2 = 2\mu\rho^2\text{-}\nu\rho^2 = 144\text{-}144 = 0.$$

---

[1]) Cremona, „Mémoire“ (56)

Diese beiden Berechnungsreihen für ψ und φ liefern nichts neues, dienen aber zur Kontrolle der übrigen Anzahlen von $\Sigma\, \Pi_P$.
3

Fasse ich die Ergebnisse zusammen, so kann ich für das System der reinen zweiten Polarflächen einer F^4 folgende Tabelle aufstellen:

Bedingungen für Π_P	μ (durch Pgeht)	ν (g berührt)	ρ (ε berührt)	χ (Kegel 2. Gr.)	φ (Doppeleb.)	ψ (Ebenenp.)
μ^2 (durch P_1, P_2, geht)	8	16	24	32	0	0
$\mu\nu$ (d. P′ geht u. g′ ber.)	16	32	48	64	0	0
$\mu\rho$ (d. P′ geht u. ε′ ber.)	24	48	72	2.48	0	0
ν^2 (g_1 und g_2 berührt)	32	64	96	128	0	0
$\nu\rho$ (g′ und ε′ berührt)	48	96	144	2.96	0	0
ρ^2 (ε_1 und ε_2 berührt)	72	144	136(+80)	4.32	0	80

Aus dieser Tabelle kann ich jede Anzahl ablesen.

Die entsprechenden Anzahlen für das System der vorletzten Polarflächen einer F^n sind bereits von Zeuthen in der Abhandlung: „Note sur les quadriques polaires“ (Annali di Matematica S. II. Bd IV) berechnet worden, und die dort gefundenen Anzahlen in der hier gewählten Ausdrucksweise sind folgende:

$\mu^3 = (n-2)^3$, $\mu^2\nu = 2\,(n-2)^3$, $\mu^2\rho = 3\,(n-2)^3$,
$\mu\nu^2 = 4\,(n-2)^3$, $\mu\nu\rho = 6\,(n-2)^3$, $\mu\rho^2 = 9\,(n-2)^3$,
$\nu^3 = 8\,(n-2)^3$, $\nu^2\rho = 12\,(n-2)^3$, $\nu\rho^2 = 18\,(n-2)^3$,
$\rho^3 = 17\,(n-2)^3\,(+\,10\,(n-2)^3)$, $\mu^2\chi = 4\,(n-2)^3$,
$\mu\nu\chi = 8\,(n-2)^3$, $\mu\rho\chi = 12\,(n-2)^3$, $\nu^2\chi = 16\,(n-2)^3$
$\nu\rho\chi = 24\,(n-2)^3$, $\rho^2\chi = 16\,(n-2)^3$, $\psi\rho^2 = 10\,(n-2)^3$,

die hier zur Vergleichung dienen mögen.

(18) Endliche Anzahlen von Flächen des Systems $\Sigma\, \Pi_P$
3
erhalte ich auch, wenn ich anstatt der 3 einfachen Bedingungen eine 3-fache den Flächen auferlege.

So kann ich die Anzahl der reinen zweiten Polarflächen Π_P bestimmen, welche eine gegebene Gerade g enthalten.

Die Bedingung ist 3-fach; denn g liegt auf Π_P, wenn 3 Punkte von g auf Π_P liegen. Gebe ich mir aber 3 Punkte auf g, so gehen $\mu^3 = 8$ Flächen Π_P durch sie, und diese 8 Flächen enthalten dann g ganz. Frage ich jetzt nach den Polen dieser 8 Flächen, so müssen sie auf den 2. reinen Polarflächen aller Punkte von g liegen, weil ihre reinen 2. Polarflächen durch alle Punkte von g gehen[1]). Die reinen zweiten Polarflächen nun der Punkte von g berühren sämtlich die Polarfläche Π_g und gehen durch die Doppelpunkte von Π_g[2]); folglich sind diese Doppelpunkte von Π_g, die gemeinsamen Punkte der reinen zweiten Polarflächen von 3 Punkten auf g, die Pole der reinen vorletzten Polarflächen einer F^n bezw. der reinen 2. Polarflächen von F^4, welche die Gerade g enthalten: „Unter den reinen vorletzten Polarflächen einer F^n bezw. den reinen 2. Polarflächen einer F^4, gibt es $(n-2)^3$ bezw. 8 Flächen, welche durch eine gegebene Gerade gehen, und deren Pole sind die $(n-2)^3$ bezw. 8 Doppelpunkte der [reinen] Polarfläche der Gerade in Bezug auf F^n bezw. F^4."

(19) Stelle ich für die reine zweite Polarfläche eines Punktes in Bezug auf F^4 oder die reine vorletzte Polarfläche eines Punktes in Bezug auf F^n die Bedingung auf, dass für sie ein gegebener Punkt eine gegebene Ebene zur Polarebene haben soll, so ist das auch eine 3-fache Bedingung.

Gegeben ist der Punkt E und die Ebene ε; dann muss für die gesuchte Fläche Π_P ε Polarebene von E sein, d. h. ε muss die erste Polarfläche von E in Bezug auf die (n-2)-te Polarfläche Π_P von P oder die (n-2)-te oder letzte Polarfläche von P in Bezug auf die erste Polarfläche von E sein[3]); mithin müssen die ersten Polarflächen der Punkte von ε in Bezug auf die erste Polarfläche von E sämtlich durch P

---

[1]) Cremona, „Grundzüge" (62).
[2]) Cremona, „Mémoire" (50)
[3]) „ , „Grundzüge" (83).

gehen. P muss also ein Grundpunkt des Netzes sein, welches die ersten Polarflächen der Punkte einer Ebene in Bezug auf die erste Polarfläche von E bilden[1]; die Flächen dieses Netzes sind (n-2)-ter Ordnung, also gibt es $(n-2)^3$ Punkte P, für deren Flächen Π_P E und ε polar sind und ich erhalte den Satz:

Unter den reinen 2. Polarflächen einer F^4 bezw. den reinen vorletzten Polarflächen einer F^n gibt es 8 bezw. $(n-2)^3$, für welche eine gegebene Ebene ε und ein gegebener Punkt E polar sind, oder welche eine gegebene Ebene in einem gegebenen Punkt berühren [wenn ε und E incidieren]; die Pole dieser Flächen sind die Grundpunkte des Netzes, das man erhält, wenn man die reinen 1. Polarflächen der Punkte von ε in Bezug auf die 1. Polarfläche von E bildet."

(20) Stelle ich für eine reine zweite Polarfläche der F^4 die Bedingung auf, dass sie eine Ebene ε längs einer Gerade berühren soll, so ist das auch eine 3-fache Bedingung; denn dazu muss die Polarfläche zunächst ein Kegel 2. Grades sein[2] [Bedingung χ], und der Kegel muss ausserdem die Ebene ε zur Tangentialebene im engeren Sinne haben; das ist aber für den Kegel 2. Gerades eine zweifache Bedingung, da er nur ∞^1 Tangentialebenen im engeren Sinne besitzt. Es muss also in dem System der reinen zweiten Polarflächen der F^4 bezw. der reinen (n-2)-ten Polarflächen einer F^n eine endliche Anzahl von Flächen geben, die Kegel 2. Grades sind und als solche ε zur Tangentialebene im engeren Sinne haben.

Zu der Ebene ε gehört die reine Polarfläche Π_ε; auf ihr müssen die Pole der gesuchten Kegel sicher liegen, da sie der Ort aller Punkte ist, deren reine (n-2)-te Polarflächen ε berühren. Hier soll aber die reine (n-2)-te Polarfläche die Ebene ε längs einer Geraden, die nicht gegeben ist, berühren,

---

[1]) Cremona, „Grundzüge" (87).

[2]) Denn nur Kegel 2. Grades können unter allen Flächen 2. Grades von einer Ebene längs einer Doppelgerade geschnitten werden.

d. h. es muss auf jeder Gerade g von ε ein Berührungspunkt zwischen der reinen (n-2)-ten Polarfläche und ε liegen, daraus folgt aber, dass die reine (n-2)-te Polarfläche jede Gerade von ε berühren muss. Die Pole nun der reinen (n-2)-ten Polarflächen, welche g berühren, liegen auf Πg, folglich müssen die Pole der hier gesuchten Flächen auf den ∞^2 reinen Polarflächen Πg aller Geraden g von ε liegen. Diese Flächen Πg berühren alle die Πε und gehen sämtlich durch die 4 $(n-2)^3$ Doppelpunkte der Πε [1]). Mithin sind die Doppelpunkte P der Πε die Pole der gesuchten Flächen.

Denn die (n-2)-te Polarfläche Π_P eines solchen Punktes P berührt die Ebene ε und jede Gerade g von ε. Π_P berühre nun eine Gerade g in dem Punkt 0, ausserdem die Ebene ε im Punkt 0′, dann muss g als Tangente von Π_P durch den Berührungspunkt 0′ von ε gehen und in ihm die Π_P berühren. Da nun die Gerade g nicht in 2 Punkten die Π_P, eine Fläche 2. Grades, berühren kann, müssen 0 und 0′ zusammenfallen, d. h. es muss auf jeder Gerade g von ε ein Punkt liegen, in dem Π_p die ε berührt, oder es muss in ε eine Kurve 1. Ordnung, also eine Gerade geben, deren Punkte Berührungspunkte zwischen Π_P und ε sind. Folglich berührt Π_P die Ebene ε längs dieser Geraden.

Π_P ist aber auch ein Kegel 2. Grades; dazu muss P auf der Hesse'schen Fläche der F^4 bezw. F^n liegen. P liegt auf Πε; diese Fläche aber berührt die Hesse'sche Fläche längs der Kurve der Doppelpunkte der 1. Polarflächen der Punkte von ε [2]); auf dieser Kurve also müsste P liegen. Π_P berührt die Ebene ε längs einer Geraden l, also muss ε Polarebene oder 1. Polarfläche aller Punkte von l in Bezug auf die (n-2)-te Polarfläche Π_P von P oder (n-2)-te Polarfläche, d. h. Polarebene von P in Bezug auf die 1. Polarflächen aller Punkte von l sein, die einen Büschel bilden. Wenn aber ein Punkt in Bezug auf die Flächen eines Büschels die nämliche Polarebene hat, so ist er für

---

[1]) Cremona, „Mémoire" (48)
[2]) Cremona, „Mémoire" (47)

eine Fläche des Büschels Doppelpunkt;[1]) folglich liegt P auf der Kurve der Doppelpunkte der 1. Polarflächen der Punkte von ε, also auch auf der Hesse'schen Fläche, so dass Π_P tatsächlich ein Kegel 2. Grades ist.

Mithin gilt der Satz:

„Unter den reinen 2. Polarflächen einer F^4 bezw. den reinen (n-2)-ten Polarflächen einer F^n gibt es 32 bezw. 4 $(n-2)^3$ Kegel 2. Grades, die eine Ebene ε zur Tangentialebene im engeren Sinne haben, und die Pole dieser Polarflächen sind die Doppelpunkte der [reinen] Polarfläche von ε in Bezug auf F^4 bezw. F^n."

Teil II.

Reine Polarflächen von Ebenen in Bezug auf F^4.

§ 1. Mannigfaltigkeit, Ordnung, Klasse und Rang der reinen Polarflächen von Ebenen.

(21) Die [reine] Polarfläche Π_ε einer Ebene ε ist in (11) definiert worden als Ort der Punkte, deren reine (n-2)-te Polarflächen in Bezug auf F^4 die Ebene berühren.

„Die reinen Polarflächen Π_ε aller Ebenen des Raumes bilden ein 3-stufiges System $\Sigma^3 \Pi_\varepsilon$."

Die Ordnung einer solchen Fläche ist in (11) berechnet worden; sie ist $3(n-2) = 6$.

Ich will jetzt noch die Klasse berechnen. Die Klasse einer allgemeinen Fläche n-ter Ordnung ist $n.(n-1)^2$.[2]). Jeder Doppelpunkt der Fläche verringert nun die Klasse um 2, also ist Π_ε, die ja nach (11) 32 Doppelpunkte hat, von der Klasse $6.25 - 64 = 86$.

---

[1]) Cremona, „Grundzüge" (125)
[2]) „ „ „ (66)

Die Tangenten von Π_ε bilden einen Strahlenkomplex; denn es gibt ihrer ∞^1 in jedem Punkt von Π_ε, im ganzen also ∞^3. Von jedem Punkt des Raumes kommt ein Tangenten-Kegel von der Ordnung $n(n-1) = 6.5 = 30$ an Π_ε [1]); mithin ist der Tangentenkomplex einer Π_ε vom Grade 30.

„Eine Fläche Π_ε ist von der Ordnung 6, von der Klasse 86, und hat einen Tangentenkomplex 30-ten Grades, d. h. den Rang 30."

§2. Das System der reinen Polarflächen von Ebenen eines Ebenenbüschels.

(22) Ich lasse die Ebene ε einen Ebenenbüschel mit der Axe g durchlaufen, und erhalte ein einstufiges System, das ich mit $\Sigma^1 \Pi_\varepsilon$ bezeichnen will.

Es sind dann für dieses System die Anzahlen μ, ν und ρ zu berechnen.

Die erste Anzahl ist leicht zu bestimmen; denn soll die Polarfläche von ε durch einen Punkt P gehen, so muss die (n-2)-te Polarfläche von P die Ebene ε berühren. Die (n-2)-te Polarfläche von P ist eine Fläche 2. Grades, folglich kommen an sie von g aus 2 Tangentialebenen, deren reine Polarflächen dann durch P gehen; mithin ist die Anzahl $\mu = 2$.

Nun kommen ebenso wie von g von jeder Gerade des Raumes zwei Tangentialebenen an die (n-2)-te Polarfläche von P, und deren reine Polarflächen müssen alle durch P gehen; somit gilt der Satz:

„Der Ort der Ebenen, deren reine Polarflächen durch einen Punkt P gehen, ist die (n-2)-te Polarfläche von P, eine Fläche 2. Klasse.

(23) Als nächste Charakteristik des Systems ist zu bestimmen, die Zahl der Flächen, welche eine Gerade berühren.

Das vorliegende System ist einstufig, hat den Index 2 und besteht aus Flächen 6. Ordnung. Ich will die

[1]) Cremona, „Grundzüge" (65)

Untersuchung verallgemeinern und nehme ein System 1. Stufe mit dem Index ϑ von Flächen n-ter Ordnung Daraus will ich berechnen, wie viele Flächen des Systems eine gegebene Gerade berühren.

Nehme ich einen Punkt X auf l, so gehen durch ihn ϑ Flächen des Systems, welche l in $\vartheta.(n-1)$ weiteren Punkten schneiden, die ich als X′ dem X zuordne. Umgekehrt lasse ich dem X′ die ϑ (n-1) weiteren Schnittpunkte der ϑ durch ihn gehenden Flächen entsprechen, und erhalte so auf l eine involutorische Korrespondenz $[\vartheta(n-1)]$, deren 2ϑ (n-1) Koïnzidenzen Punkte sind, in denen sich 2 entsprechende Punkte X und X′, also 2 Schnittpunkte ein- und derselben Flächen mit l vereinigt haben. In ihnen berührt also eine Fläche des Systems die l, wenn ich unter Berührung das Zusammenfallen zweier Schnittpunkte der Fläche verstehe. Ich erhalte so den Satz:

„Liegt ein einstufiges System von Flächen n-ter Ordnung mit dem Index ϑ vor, so kommt es 2ϑ (n-1)-mal vor, dass Flächen des Systems eine Gerade l berühren," oder, „so gibt es $2\vartheta(n-1)$ Flächen in dem System, welche eine gegebene Gerade berühren", wobei eine Fläche mit α-facher Berührung auch α-fach zählt.

(24.) Im vorliegenden Fall, bei $\sum_1 \Pi_\varepsilon$ ist $\vartheta = 2$, $n = 6$: mithin ist die Anzahl $\nu = 20$.

Von den reinen Polarflächen der Ebenen eines Büschels berühren also 20 eine gegebene Gerade, oder die ∞^2 Ebenen, deren reine Polarflächen diese Eigenschaft haben, umhüllen eine Fläche 20. Klasse.

Betrachte ich nun die Polarfläche Π_l der Gerade l in Bezug auf F^4, so finde ich, dass sie auch von der 20. Klasse ist, und da liegt der Gedanke nahe, dass Π_l jene eben gefundene Fläche 20. Klasse ist, deren Tangentialebenen reine Polarflächen haben, die l berühren; das lässt sich tatsächlich beweisen.

P sei ein Punkt der reinen Polarfläche Π_l der Gerade l und ε die Tangentialebene an Π_l in P; dann muss Π_ε die Gerade l berühren. Denn die [reine] (n-2)-te Polarfläche von P berührt l, da P auf Π_l liegt, hat also 2 unendlich nahe Punkte Q und Q′ mit l gemeinsam. Die reinen 2. Polarflächen von Q und Q′ gehen dann durch P[1]), andererseits aber berühren sie Π_l je längs einer Kurve 4. Ordnung[2]) und haben ausser dieser Kurve keinen Punkt mit Π_l gemeinsam, so dass beide in P die Π_l berühren. Wenn sich aber 2 Flächen in einem Punkt berühren, so haben sie in ihm dieselbe Tangentialebene; die Ebene ε ist also Berührungsebene von Π_Q und $\Pi_{Q'}$ in P, oder Π_Q und $\Pi_{Q'}$, die reinen (n-2)-ten Polarflächen von Q und Q′, berühren ε; folglich müssen Q und Q′ auf der reinen Polarfläche Π_ε von ε liegen, Π_ε muss mit l zwei unendlich nahe Punkte gemein haben, d. h. die Gerade l berühren. Der Beweis gilt nur für Grundflächen 4. Ordnung, da nur bei ihnen 2. und (n-2)-te Polarfläche identisch sind. Mithin gilt der Satz:

„Wenn die [reine] Polarfläche einer Gerade l in Bezug auf F^4 die Ebene ε berührt, so muss die Polarfläche von ε in Bezug auf F^4 auch die Gerade l berühren."

Die Tangentialebenen von Π_l haben also die gesuchte Eigenschaft; dass sie aber die einzigen derartigen Ebenen sind, geht aus dem Satz (33) hervor, dem ich ja die Form geben kann: „Soll die [reine] Polarfläche einer Ebene ε in Bezug auf F^4 eine Gerade l berühren, so muss ε Tangentialebene der [reinen] Polarfläche von l sein[3])."

So erhalte ich den Satz:

„Der Ort aller Ebenen, deren reine Polarflächen in Bezug auf F^4 eine Gerade l berühren, ist die Polarfläche von l in Bezug auf F^4, eine Fläche 20. Klasse."

---

[1]) Cremona, „Grundzüge" (62)

[2]) „ , „Mémoire" (50)

[3]) Diesen Satz habe ich erst in Teil III bewiesen, weil sich sein Beweis auf den Satz (32) stützt.

(25) Soll ich jetzt die Anzahl derjenigen reinen Polarflächen von Ebenen des Büschels g berechnen, welche eine gegebene Ebene η berühren, so werde ich vermuten können, dass dies die Anzahl der Tangentialebenen von g an die Polarfläche $\Pi\eta$ von η ist, also die Klasse dieser Fläche, für die ich den Wert 86 gefunden habe.

Die Ebene η soll von der Polarfläche einer Ebene ε berührt werden, η soll also Tangentialebene von $\Pi\varepsilon$ sein, etwa in dem Punkt P. Dann berührt die (n-2)-te Polarfläche von P die Ebene ε in einem Punkt Q [weil P auf $\Pi\varepsilon$ liegt], d. h. sie berührt jeden Strahl des Strahlenbüschels (Q,ε). Daraus folgt, dass P auf den reinen Polarflächen aller Strahlen aus (Q,ε) in Bezug auf F^4 liegen muss; diese aber berühren die $\Pi\varepsilon$ je längs einer Kurve 12. Ordnung[1]) können also mit $\Pi\varepsilon$ ausser dieser Kurve keinen Punkt gemein haben, da sich 2 Flächen 6. und 4. Ordnung in einer Kurve 24. Ordnung, hier also einer doppeltzählenden 12. Ordnung schneiden. Mithin müssen die reinen Polarflächen der Strahlen aus (Q,ε) in P die $\Pi\varepsilon$ berühren und somit η zur Tangentialebene haben. Infolge dessen berührt $\Pi\eta$ auf Grund des eben bewiesenen Satzes sämtliche Strahlen von (Q,ε) und mithin auch die Ebene ε.

Es ist also der Satz bewiesen:

„Wenn die [reine] Polarfläche einer Ebene ε in Bezug auf F^4 eine 2. Ebene η berührt, so muss die [reine] Polarfläche von η auch die Ebene ε berühren.

Wenn ich also nach den Ebenen frage, deren reine Polarflächen die Ebene η berühren, so finde ich:

„Der Ort der Ebenen, deren reine Polarflächen in Bezug auf F^4 eine Ebene η berühren, ist die Polarfläche der Ebene η in Bezug auf F^4, eine Fläche 86. Klasse."

Daraus folgt für das System $\sum_1 \Pi\varepsilon$, dass die Anzahl $\rho = 86$ ist.

Fasse ich die Ergebnisse zusammen, so finde ich:

---

[1]) Cremona „Mémoire" (48).

„Die reinen Polarflächen der Ebenen eines Ebenenbüschels in Bezug auf F^4 bilden ein einstufiges System von Flächen 6. Ordnung, von denen

2 durch einen Punkt gehen,
20 eine Gerade und
86 eine Ebene berühren,

wobei Flächen, die mehrfach, etwa α-fach berühren, auch α-fach gezählt werden."

§ 3. Das System der reinen Polarflächen der Ebenen eines Bündels.

(26) Der Ebenenbündel P enthält ∞^2 Ebenen, so dass die reinen Polarflächen der Ebenen des Bündels ein 2-stufiges System von Flächen 6. Ordnung bilden, das ich mit $\Sigma_2 \Pi_6$ bezeichne.

Die Anzahlen dieses Systems sind leicht zu berechnen.

Die Anzahl der Ebenen des Bündels, deren reine Polarflächen durch 2 Punkte P_1 und P_2 gehen, ist die Zahl der gemeinsamen Tangentialebenen von P aus an die beiden reinen (n-2)-ten Polarflächen von P_1 und P_2.

Nun besteht der Satz:

Zwei Flächen n_1- und n_2-ter Klasse haben einen Torsus $(n_1 \cdot n_2)$-ter Klasse von Tangentialebenen gemein. Hier ist $n_1 = n_2 = 2$, also ist der Torsus 4. Klasse, d. h. von einem Punkte P kommen 4 Ebenen des Torsus. Also ist

$$\mu^2 = 4.$$

Die übrigen Anzahlen sind analog zu berechnen; es sind einfach die Produkte aus je 2 der Klassenzahlen der gefundenen Oerter zu bilden, und zwar sind diese in derselben Weise zusammenzustellen wie die Charakteristiken.

„Danach sind die Anzahlen des Systems der reinen Polarflächen aller Ebenen eines Bündels:

$$\mu^2 = 4,\ \mu\nu = 40,\ \mu\rho = 172,\ \nu^2 = 400,$$
$$\nu\rho = 20 \cdot 86 = 1720,\ \rho^2 = 86^2 = 7396,$$

bei einer Grundfläche 4. Ordnung."

§ 4. Das System der reinen Polarflächen aller Ebenen des Raumes.

(27) Die Anzahlen dieses dreistufigen Systems, sind zu berechnen auf Grund des Satzes, dass 3 Flächen von der Klasse n_1, n_2, n_3 $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ Tangentialebenen gemeinhaben.

Ich brauche also nur die Produkte aus $n_1 = 2$, $n_2 = 20$, $n_3 = 86$ zu je 3 zu bilden und erhalte sämtliche 10 Anzahlen des Systems $\sum_3 \Pi_\varepsilon$:

„$\mu^3 = 8$, $\mu^2\nu = 80$, $\mu^2\rho = 344$,
$\mu\nu^2 = 800$, $\mu\nu\rho = 3440$, $\mu\rho^2 = 14792$,
$\nu^3 = 8000$, $\nu^2\rho = 34400$,
$\nu\rho^2 = 147920$, $\rho^3 = 636056$."

(28) Ich habe hier gefunden, dass die Anzahl der Flächen Π_ε, die durch 3 beliebige Punkte gehen, 8 ist. Die Fläche Π_ε ist von der Ordnung 6 und als solche eindeutig bestimmt durch $1/6\ (n+1)\ (n+2)\ (n+3)-1 = 83$ Punkte.

Nun gehen die reinen Polarflächen aller Ebenen durch die 80 Doppelpunkte der Hesse'schen Fläche der F^4.[1]) Wären nun diese 80 Doppelpunkte in ihrer Lage nicht von einander abhängig, so würden sie 80 einfache lineare Bedingungen für die Flächen Π_ε darstellen, und dadurch ein Gebüsch von Flächen 6. Ordnung festlegen, da ja 3 weitere gegebene Punkte dann eindeutig eine Fläche 6. Ordnung bestimmen würden. Durch 3 weitere beliebige Punkte gehen aber, wie gezeigt, 8 Flächen Π_ε; also ist es notwendig, dass die Doppelpunkte nicht 80 unabhängige gegebene Punkte für Π_ε sind und erst mit anderen Bedingungen das 3-stufige System der Π_ε festlegen. Ich kann also daraus schliessen:

„Die 80 Doppelpunkte der Hesse'schen Fläche der F^4 sind in ihrer Lage nicht unabhängig von einander."

Leider ist es mir nicht gelungen, die Art der Abhängigkeit festzustellen, etwa ähnlich wie Cremona es für die Doppelpunkte der Hesse'schen Fläche einer F^3 getan hat[2]).

---

[1]) Cremona, „Mèmoire" (47)
[2]) „ „Mémoire" (98)

Teil III.

Reine Polarflächen von Geraden in Bezug auf F^4.

§ 1. Mannigfaltigkeit, Ordnung Klasse und Rang der reinen Polarflächen von Geraden.

(29) Die [reine] Polarfläche Πg einer Gerade g ist definiert als Ort der Punkte, deren reine (n-2)-te Polarflächen die Gerade g berühren. Solcher Polarflächen gibt es für jede Gerade ∞^2, sodass ihre Pole eine Fläche erfüllen. Folglich gehört zu jeder Gerade eine derartige Fläche Πg und ihre Mannigfaltigkeit ist mithin ∞^4.

Die Ordnung der [reinen] Polarfläche einer Gerade ist für eine Grundfläche 4. Ordnung 2 (n-2) = 4, wie in (9) bereits gezeigt; also bilden die reinen Polarflächen aller Geraden des Raumes ein 4-stufiges System von Flächen 4. Ordnung, $\sum_4 \Pi g$.

„Die Klasse der [reinen] Polarfläche einer Gerade" ist, da die Fläche 8 Doppelpunkte hat, $4 \cdot 3^2 - 16 =$ „20."

Der Grad des Komplexes der Tangenten einer Πg ist, da der Kegel, von einem Punkt aus der Πg umschrieben, die Ordnung $4 \cdot 3 = 12$ besitzt[1]), 12. „Der Rang von Πg ist also 12."

§ 2. Das System der reinen Polarflächen der Geraden eines Strahlenbüschels.

(30) Die Gerade g durchlaufe den Strahlenbüschel (O, ω); dieser enthält ∞^1 Geraden, also bilden die reinen Polarflächen der Strahlen des Büschels ein 1-stufiges System $\sum_1 \Pi g$, für das die 3 Anzahlen μ, ν und ρ zu berechnen sind.

„Die Anzahl μ der Flächen des Systems, die durch einen gegebenen Punkt P gehen, ist 2."

Denn wenn die [reine] Polarfläche einer Gerade g durch P gehen soll, so muss die (n-2)-te Polarfläche Π_P von

---

[1]) Cremona, „Grundzüge" (65)

P die g berühren, g muss Tangente von Π_P sein. Die Tangenten aber der Fläche 2. Grades Π_P bilden einen Komplex 2. Grades, mithin sind in jedem Strahlenbüschel, also auch in (O,ω) 2 Geraden enthalten, die Π_P berühren, und μ ist demnach 2.

Hieraus folgt sogleich der Satz:

„Der Ort der Geraden, deren reine Polarflächen durch einen gegebenen Punkt gehen, ist der Tangentenkomplex 2. Grades der (n-2)-ten Polarfläche von P für eine Grundfläche 4. Ordnung."

(31) Die nächste Anzahl ν der Flächen aus $\sum_1 \Pi g$, welche eine gegebene Gerade l berühren, ist jetzt mit Hülfe des Satzes aus (23) leicht zu berechnen. Es liegt hier ein einstufiges System von Flächen 4. Ordnung mit dem Index 2 vor, folglich ist die gesuchte Anzahl

$$\nu = 2\,\vartheta\cdot(n-1) = 2\cdot 2\cdot 3 = 12.$$

Nun gibt es im ganzen unter den ∞^4 reinen Polarflächen Πg ∞^3, welche die Bedingung ν erfüllen; folglich bilden die Geraden, zu denen jene ∞^3 Flächen Πg gehören, einen Komplex, und da nun ein beliebiger Strahlenbüschel (O,ω) 12 derartige Geraden enthält, ist der Komplex vom Grade 12.

(32) Nun habe ich in (29) festgestellt, dass der Tangentenkomplex der [reinen] Polarfläche Π_l von l auch 12. Grades ist, und es lässt sich tatsächlich beweisen, dass die Geraden dieses Komplexes reine Polarflächen besitzen, die l berühren, immer eine Grundfläche 4. Ordnung vorausgesetzt.

Es liegt eine Gerade l vor, ihre [reine] Polarfläche in Bezug auf F^4 ist Π_l; ferner werde l von der Polarfläche Π_g einer Gerade g in P berührt. Dann muss die (n-2)-te Polarfläche von P die Gerade g in einem Punkt Q berühren [nach der Definition von Π_g], d. h. mit g den Punkt Q und den unendlich nahen Punkt Q′ gemeinsam haben. Folglich gehen die reinen 2. Polarflächen von Q und Q′ durch

P [1]) und berühren in ihm, da Q und Q′ auf g liegen, die Fläche Π_g, da sie diese je längs einer Kurve 4. Ordnung berühren [2]). Sie haben also in P dieselbe Tangentialebene wie Π_g und damit auch l zur Tangente. Da die beiden Flächen bei der Grundfläche 4. Ordnung auch (n-2)-te Polarflächen von Q und Q′ sind, müssen Q und Q′ auf der Polarfläche Π_l von l liegen. Π_l hat also mit g 2 unendlich nahe Punkte gemeinsam, berührt also g in Q.

Folglich kann ich den Satz aussprechen:

„Wenn die [reine] Polarfläche einer Gerade g in Bezug auf F^4 eine 2. Gerade l berührt, so muss auch die [reine] Polarfläche Π_l von l in Bezug auf F^4 die Gerade g berühren.“

Daraus folgt:

„Der Ort aller Geraden g, deren reine Polarflächen in Bezug auf eine F^4 eine Gerade l berühren, ist der Tangentenkomplex 12. Grades der [reinen] Polarfläche von l in Bezug auf F^4.“

(33) Will ich jetzt die Anzahl ρ der Flächen aus $\sum_1 \Pi_g$ feststellen, so kann ich vermuten, dass diese Anzahl der Grad des Tangentenkomplexes von Π_η, der Polarfläche der zu berührendenden Ebene η, sein wird.

Ich nehme an, g sei eine Tangente von Π_η im Punkt P, dann berührt die (n-2)-te Polarfläche von P nach der Definition von Π_η die Ebene η in Q und damit alle Strahlen l des Büschels (Q,η). Daraus folgt, dass P auf den reinen Polarflächen der Strahlen l liegt, welche Π_η längs einer Kurve 12. Ordnung, also auch in P berühren müssen [3]); folglich ist g Tangente der reinen Polarflächen der Strahlen l des Büschels (Q,η). mithin berührt nach dem eben bewiesenen Satz (32) Π_g sämtliche Strahlen von (Q,η) in Q und damit auch die Ebene η in Q.

Mithin gilt der Satz:

---

[1]) Cremona, „Grundzüge“ (62).
[2]) „ „Memoire“ (50).
[3]) „ „Mémoire“ (48)

„Wenn die [reine] Polarfläche einer Ebene in Bezug auf F^4 eine Gerade berührt, so muss die reine Polarfläche dieser Gerade auch die Ebene berühren."

Damit ist bewiesen, dass die reinen Polarflächen der Tangenten von Π_η die Ebene η berühren, und dass sie die einzigen derartigen Flächen sind, geht aus dem Satz (24) hervor, den ich ja auch aussprechen kann: Soll die [reine] Polarfläche einer Gerade eine Ebene berühren, so muss bei einer F^4 als Grundfläche die Gerade Tangente der [reinen] Polarfläche der Ebene sein.

Daraus folgt:

„Der Ort aller Geraden, deren reine Polarflächen in Bezug auf F^4 eine Ebene berühren, ist der Tangentenkomplex 30-ten Grades (25) der [reinen] Polarfläche der Ebene in Bezug auf F^4."

In dem vorliegenden Strahlenbüschel (0, ω) sind auch 30 Tangenten aus diesem Komplex enthalten, mithin ist $\rho = 30$.

„Das einstufige System der reinen Polarflächen der Geraden eines Strahlenbüschels in Bezug auf F^4 hat die drei Charakteristiken

$$\mu = 2,\ \nu = 12,\ \rho = 30."$$

§ 3. Das System der reinen Polarflächen der Geraden eines Bündels oder Feldes.

(34) Ein Bündel 0 oder ein Feld ω enthält ∞^2 Geraden, so dass deren reine Polarflächen je ein 2-stufiges System von Flächen Πg bilden, für das ich die 2-stufigen Charakteristiken zu berechnen habe.

Dazu muss ich immer 2 der in § 2 als Oerter gefundenen Strahlenkomplexe zusammenstellen, und es kommt dann auf die beiden Komplexen gemeinsamen Geraden an. Nun gilt der Satz: Zwei Strahlenkomplexe vom Grade p und p_2 haben eine Kongruenz vom Grade [d. h. von der Ordnung und Klasse] $p_1 \cdot p_2$ gemeinsam[1]). Ordnung und Klasse der Kongruenz, d. h. die Anzahl der Geraden durch

[1]) Sturm, Liniengeometrie I, Nr. 35.

einen Punkt bezw. in einer Ebene sind also stets gleich; darum erhalte ich durchweg für die zu Strahlen-Bündel und -Feld gehörigen 2-stufigen Systeme dieselben Anzahlen.

Die Strahlenkomplexe, die ich zu je zwei zusammenstellen muss, sind vom Grade 2, 12 und 30 für Punkt, Gerade und Ebene, und der Grad der gemeinsamen Kongruenz gibt dann die Anzahl für Bündel und Feld, und zwar ist

$$\mu^2 = 2.2 = 4,\ \mu\nu = 2.12 = 24,$$
$$\mu\rho = 2.30 = 60,\ \nu^2 = 12^2 = 144,$$
$$\nu\rho = 12.30 = 360 \text{ und } \rho^2 = 30^2 = 900.$$

„Die reinen Polarflächen der Geraden eines Bündels oder Feldes in Bezug auf F^4 bilden ein 2-stufiges System von Flächen 4. Ordnung mit den Charakteristiken $\mu^2 = 4$, $\mu\nu = 24$, $\mu\rho = 60$, $\nu^2 = 144$, $\nu\rho = 360$ und $\rho^2 = 900$."

§ 4. Das System der reinen Polarflächen der Geraden eines Strahlengebüsches.

(35) Ein Strahlengebüsch ist der Inbegriff der ∞^3 Geraden, die eine gegebene Gerade m treffen; ihre reinen Polarflächen bilden ein 3-stufiges System.

Die Anzahlen dieses Systems erhalte ich, wenn ich feststelle, wieviel gemeinsame Strahlen aus je 3 zu Punkt, Gerade und Ebene gehörigen Komplexe der Gerade m begegnen. Nun gilt der Satz: Drei Strahlenkomplexe mit den Gradzahlen p_1, p_2 und p_3 haben eine Regelfläche vom Grade $2.p_1.p_2.p_3$ gemeinsam[1]), und der Grad einer Regelfläche ist ja die Zahl der Geraden auf ihr, die einer gegebenen. Gerade m begegnen. Folglich erhalte ich die gesuchten Anzahlen, wenn ich die doppelten Produkte aus je 3 Gradzahlen jener 3 Komplexe vom Grade 2, 12 und 30 bilde.

---

[1]) Sturm, Liniengeometrie I, Nr. 35.

Somit erhalte ich als Ergebnis:

„Das 3-stufige System der reinen Polarflächen der Geraden eines Strahlengebüsches hat die Charakteristiken: $\mu^3 = 2.2^3 = 16$, $\mu^2\nu = 2.2^2.12 = 96$, $\mu^2\rho = 2.2^2.30 = 240$, $\mu\nu^2 = 2.2.12^2 = 576$, $\mu\nu\rho = 2.2.12.30 = 1440$, $\mu\rho^2 = 2.2.30^2 = 13600$, $\nu^3 = 2.12^3 = 2856$, $\nu^2\rho = 2.12^2.30 = 8640$, $\nu\rho^2 = 2.12.30^2 = 21600$ und $\rho_3 = 2.30^3 = 54000$."

§ 5. Das System der reinen Polarflächen aller Geraden des Raumes.

(36) Das System der reinen Polarflächen aller Geraden des Raumes ist 4-stufig, und seine 15 vierfachen Charakteristiken erhalte ich, wenn ich die Anzahl der gemeinsamen Strahlen von je 4 der gefundenen 3 Komplexe berechne. Dazu benutze ich den Satz: 4 Komplexe vom Grade p_1, p_2, p_3 und p_4 haben $2\,p_1.p_2.p_3.p_4$ Strahlen gemeinsam [1]).

Mit Hilfe dieses Satzes finde ich: Die reinen Polarflächen aller Geraden des Raumes in Bezug auf F^4 bilden ein 4-stufiges System mit den Charakteristiken:

$$\begin{aligned}
\mu^4 &= 2\cdot 2^4 = 32,\\
\mu^3\nu &= 2\cdot 2^3\cdot 12 = 192,\\
\mu^3\rho &= 2\cdot 2^3\cdot 30 = 480,\\
\mu^2\nu^2 &= 2\cdot 2^2\cdot 12^2 = 1152,\\
\mu^2\nu\rho &= 2\cdot 2^2\cdot 12\cdot 30 = 2880,\\
\mu^2\rho^2 &= 2\cdot 2^2\cdot 30^2 = 7200,\\
\mu\nu^3 &= 2\cdot 2\cdot 12^3 = 6912,\\
\mu\nu^2\rho &= 2\cdot 2\cdot 12^2\cdot 30 = 17280,\\
\mu\nu\rho^2 &= 2\cdot 2\cdot 12\cdot 30^2 = 43200,\\
\mu\rho^3 &= 2\cdot 2\cdot 30^3 = 108000,\\
\nu^4 &= 2\cdot 12^4 = 41472,\\
\nu^3\rho &= 2\cdot 12^3\cdot 30 = 103680,\\
\nu^2\rho^2 &= 2\cdot 12^2\cdot 30^2 = 259200,\\
\nu\rho^3 &= 2\cdot 12\cdot 30^3 = 648000 \quad \text{und}\\
\rho^4 &= 2\cdot 30^4 = 1620000.
\end{aligned}$$

[1]) Sturm, Liniengeometrie I, Nr. 35.

Teil IV.

Gemischte zweite Polarflächen von zwei Punkten in Bezug auf F^4.

§ 1. Bedingungen für die Paare der Pole solcher Flächen.

(37) Die gemischte zweite Polarfläche der zwei Punkte P und P′ ist die 1. Polarfläche des Punktes P (P′) in Bezug auf die 1. Polarfläche von P′ (P) in Bezug auf die Grundfläche F^4.[1]) Die gemischte 2. Polarfläche von P und P′ ist also eine Fläche (n-2)-ter Ordnung, hier mithin eine Fläche 2. Grades, und zu jedem Punktepaar des Raumes gibt es eine solche Fläche. Da ich nun die ∞^3 Punkte des Raumes auf ∞^6 Arten zu Paaren vereinigen kann, ist die Anzahl aller möglichen gemischten 2. Polarflächen ∞^6, das System dieser Flächen also ein sechsstufiges.

(38) Aus diesem 6-stufigen System muss ein Punkt ∞^5 Flächen ausscheiden, die durch ihn gehen, und es ist die Frage, welche Bedingung die Polpaare erfüllen müssen, deren gemischte 2. Polarflächen durch den gegebenen Punkt gehen.

Der Punkt O soll auf der gemischten 2. Polarfläche von P und P′ liegen. Nun gilt der Satz: Geht die i′-te Polarfläche von P′ in Bezug auf die i-te Polarfläche von P durch O, so geht die i′-te Polarfläche von P′ in Bezug auf die (n-i-i′)-te Polarfläche von O durch P[2]). Ist also O ein Punkt der 1. Polarfläche von P′ (P) in Bezug auf die 1. Polarfläche von P (P′), so ist P (P′) ein Punkt der 1. Polarfläche von P′ (P) in Bezug auf die (n-2)-te Polarfläche von O, d. h. P (P′) liegt in der Polarebene von P′ (P) in Bezug auf die (n-2)-te Polarfläche von O, oder P und P′ sind konjugiert in Bezug auf die (n-2)-te Polarfläche von O. Die Polarebene von P′ (P) in Bezug auf die (n-2)-te

---

[1]) Cremona, „Grundzüge“ (83).

[2]) Cremona, „Grundzüge“ (84).

Polarfläche von O ist aber andrerseits identisch mit der Polarebene oder (n-2)-ten Polarfläche von O in Bezug auf die 1. Polarfläche von P′ (P). So erhalte ich den Satz:

„Soll die gemischte 2. Polarfläche von 2 Punkten durch einen gegebenen Punkt O gehen, so muss der eine Punkt auf der (n-2)-ten Polarfläche Π'_0 von O in Bezug auf die 1. Polarfläche des anderen Punktes liegen, oder so müssen die beiden Punkte in Bezug auf die (n-2)-te Polarfläche von O konjugiert sein."

Jeder Punkt P des Raumes hat nun in Bezug auf die (n-2)-te Polarfläche von O ∞^2 konjugierte Punkte, so dass ich ∞^5 Punktepaare erhalte, deren gemischte 2. Polarflächen durch O gehen.

(39) Ebenso müssen ∞^5 gemischte 2. Polarflächen eine Gerade l berühren.

Die gemischte 2. Polarfläche von P und P′ ist bei F^4 als Grundfläche, da die 1. Polarfläche von P 3. Ordnung ist, zugleich vorletzte Polarfläche von P′ in Bezug auf die 1. Polarfläche P, und wenn diese eine Gerade l berühren soll, muss der Pol P′ auf der [reinen] Polarfläche von l in Bezug auf die 1. Polarfläche von P liegen, und diese Fläche ist von der Ordnung 3 (3-2) = 2, da die 1. Polarfläche von P 3. Ordnung ist[1]), und hat 1 Doppelpunkt[2]).

Es gibt also, wenn ich P festhalte, ∞^2 Punkte P′ mit der Eigenschaft, dass die gemischte 2. Polarfläche von je einem von ihnen und P die Gerade l berührt, im ganzen mithin ∞^5 Punktepaare, deren gemischte 2. Polarflächen l berühren.

Ich kann hier also den Satz aufstellen:

„Soll die gemischte 2. Polarfläche von 2 Punkten in Bezug auf F^4 eine gegebene Gerade l berühren, so muss der eine Punkt auf der [reinen] Polarfläche Π'_1 von l in Bezug auf die 1. Polarfläche des andern Punktes, einer Fläche 2. Ordnung mit 1 Doppelpunkt, also einem Kegel 2. Grades, liegen."

---

[1]) Cremona, „Mémoire" (48) und Teil I, (9).
[2]) „ „ (50).

(40) Eine ähnliche Untersuchung lässt sich anstellen, wenn nach der Bedingung dafür gefragt wird, dass die Ebene η von der gemischten 2. Polarfläche zweier Punkte berührt wird, und es ergibt sich der Satz:

„Soll die gemischte 2. Polarfläche von 2 Punkten in Bezug auf F^4 eine gegebene Ebene η berühren, so muss der eine Punkt auf der [reinen] Polarfläche $\Pi'\eta$ von η in Bezug auf die 1. Polarfläche des andern Punktes, also auf einer Fläche 3. Ordnung[1]) mit 4 Doppelpunkten[2]), liegen."

Auch hier gibt es, wenn ich P festhalte, ∞^2 Punkte P′ mit der gesuchten Eigenschaft, also im ganzen wieder ∞^5 Paare von Punkten, deren gemischte 2. Polarflächen η berühren.

(41) Die gemischten 2. Polarflächen in Bezug auf F^4 sind Flächen 2. Grades; daher wird es in ihrem 6-stufigen System ∞^5 Kegel 2. Grades geben und ich kann sofort den Satz aufstellen:

„Soll die gemischte 2. Polarfläche zweier Punkte in Bezug auf F^4 ein Kegel 2. Grades sein, so muss der eine Punkt auf der Hesse'schen Fläche der 1. Polarfläche des andern, also auf einer Fläche 4. Ordnung mit 10 Doppelpunkten[3]), liegen."

Bei Festhaltung eines Pols gibt es mithin wieder ∞^2 gemischte 2. Polarflächen in Bezug auf F^4, die in Kegel 2. Grades ausarten, im ganzen also ∞^5.

(42) Ist P′ ein Doppelpunkt der Hesse'schen Fläche der 1. Polarfläche von P, so ist die 1. oder vorletzte Polarfläche von P′ in Bezug auf die 1. von P, also die gemischte 2. Polarfläche von P und P′ ein Ebenenpaar[4]). Nun hat diese Hesse'sche Fläche 10 Doppelpunkte, mithin gibt es, wenn ich P festhalte 10 gemischte 2. Polarflächen für F^4, die in

---

[1]) Cremona, „Mémoire" (47). u. I, (11)
[2]) „ „ (48).
[3]) „ „ (47).
[4]) „ „ (55).

Ebenenpaare ausarten, im ganzen also ∞^3. Dasselbe Resultat erhalte ich auch, wenn ich berücksichtige, dass die Bedingung dieser Ausartung für eine Fläche 2. Ordnung eine 3-fache ist; sie muss also aus dem 6-stufigen System der gemischten 2. Polarflächen ∞^3 Flächen aussondern.

„Soll die gemischte 2. Polarfläche eines Punktepaares in Bezug auf F^4 ein Ebenenpaar sein, so muss der eine Punkt einer der 10 Doppelpunkte der Hesse-'schen Fläche für die 1. Polarfläche des anderen sein."

(43) Die Bedingung endlich, dass die gemischte 2. Polarfläche in eine Doppelebene ausartet, ist eine 6-fache Bedingung; es müsste also in dem vorliegendem 6-stufigen System eine endliche Anzahl von Doppelebenen geben. Doch ist es mir nicht gelungen, eine Bedingung für die Lage der Polpaare zu finden, vielmehr hat es auf Grund folgender Betrachtung den Anschein, als ob die Anzahl der Doppelebenen auch hier 0 wäre:

Soll nämlich die gemischte 2. Polarfläche von P_1 und P_2 in eine Doppelebene ε ausarten, so müssen alle Punkte von ε Doppelpunkte der 1. Polarfläche von P_1 (P_2) in Bezug auf die 1. Polarfläche von P_1 (P_2) sein. Die 1. Polarfläche oder Polarebene von P_1 (P_2) in Bezug auf diese Doppelebene muss dann durch alle ihre Punkte gehen[1]), also ε selbst sein. Die Ebene ε ist also einmal 2. Polarfläche von P_1 in Bezug auf die 1. Polarfläche von P_2 und andererseits die 2. Polarfläche von P_2 in Bezug auf die erste von P_1 oder durch Vertauschung der Reihenfolge 1. Polarfläche von P_1 in Bezug auf die 2. von P_2. Es muss also $\Delta_{P_1}{}^2 \Delta_{P_2}{}^1 (F^4) \equiv \Delta_{P_1}{}^1 \Delta_{P_2}{}^2 (F_4)$[2]) sein; das ist aber nur möglich, wenn $P_1 \equiv P_2$ ist, dann kann ich die Exponenten der Polarformen vertauschen. In diesem Falle aber hätte ich es mit reinen 2. Polarflächen zu tun, und unter denen gibt es nach (4) keine Doppelebenen. Daher ist auch hier ihre Anzahl 0.

---

[1]) Cremona, „Grundzüge" (73)

[2]) Sturm, Vorlesungen ü. geom. Oerter höh. Gr.

§ 2. Die Systeme der gemischten zweiten Polarflächen mit einem festen Pol P.

(44) Ich halte den einen Pol P fest und lasse den 2. Pol P′ eine Gerade g durchlaufen und bilde für alle ∞^1 Paare P, P′ die gemischten 2. Polarflächen, in dem ich die 1. Polarflächen der Punkte P′ von g in Bezug auf die 1. Polarfläche von P herstelle; diese bilden einen Büschel[1]) hier von Flächen 2. Grades, in dem die Anzahlen $\mu = 1$, $\nu = 2$, $\rho = 3$ und $\chi = 4$ sind.

Die Pole P′ der Flächen, welche diese Bedingungen erfüllen, erhalte ich durch Schnitt der Gerade g mit den in (38) bis (41) angegebenen Oertern, der Polarebene eines gegebenen Punktes 0, der Polarfläche der gegebenen Gerade l, der gegebenen Ebene η und der Hesse'schen Fläche in Bezug auf die 1. Polarfläche von P.

„Die gemischten 2. Polarflächen eines festen Punktes und der Punkte einer Gerade g bilden einen Büschel, und zwar von Flächen 2. Gerades bei einer Grundfläche 4. Ordnung."

Dieser Büschel hat eine Grundkurve und ihre Punkte Q haben die Eigenschaft auf allen Flächen des Büschels zu liegen, folglich müssen nach (43) P und alle Punkte P′ von g in Bezug auf die (n - 2)-te Polarfläche Π_Q eines solchen Punktes Q konjugiert sein, die Polarebene von P in Bezug auf Π_Q muss durch g gehen. Mithin erhalte ich den Satz:

„Zu einem Punkt P gibt es eine Kurve von der Ordnung $(n-2)^2$, deren Punkte die Eigenschaft haben, dass in Bezug auf ihre vorletzten Polarflächen die Polarebene von P einen Ebenenbüschel mit gegebenen Axe durchläuft; diese Kurve ist die Polarkurve von g in Bezug auf die erste Polarfläche von P[1]).

(45) Lasse ich jetzt P′ eine Ebene ε durchlaufen, so erhalte ich ein 2 - stufiges System von gemischten 2. Polar-

---

[1]) Cremona, „Grundzüge" (86)

flächen und zwar ein Netz, da die 1. Polarflächen der Punkte P′ einer Ebene in Bezug auf eine Fläche — hier die 1. Polarfläche von P — ein Netz bilden[1]).

„Die gemischten 2. Polarflächen eines Punktes P und der Punkte einer Ebene ε bilden ein Netz von Flächen (n-2)-ter Ordnung."

Die Grundpunkte dieses Netzes sind die $(n-2)^3 = 8$ Pole der Ebene ε in Bezug auf die 1. Polarfläche von P[1]). Dadurch finde ich das Resultat (19) bestätigt, das für $(n-2)^3 = 8$ reine vorletzte Polarflächen ein gegebener Punkt P und eine gegebene Ebene ε polare Elemente sind; denn das tritt ein für die reinen (n-2)-ten Polarflächen der $(n-2)^3$) Grundpunkte dieses Netzes, für die nach (38) P zu allen Punkten von ε konjugiert ist, weil die Pole auf allen gemischten 2. Polarflächen von P und P′ in ε liegen.

Die Anzahlen sind die Zahlen der gemeinsamen Punkte der Ebene ε mit den in (38) bis (40) gefundenen Oertern, zu je 2 zusammengestellt:

$\mu^2 = 1$, $\mu\nu = 2$, $\mu\rho = 3$, $\nu^2 = 4$, $\nu\rho = 6$ und $\rho^2 = 9$,

die auch für jedes Netz von Flächen 2. Grades gelten[2]).

(46) Ich bilde jetzt alle Punktepaare aus P und den ∞^3 Punkten des Raumes und erhalte durch ihre gemischten 2. Polarflächen ein Gebüsch von Flächen 2. Grades[3]).

„Die gemischten 2. Polarflächen eines festen Punktes und der ∞^3 Punkte des Raumes bilden ein Gebüsch von Flächen (n-2)-ter Ordnung."

Die Charakteristiken dieses Systems sind für F^4 als Grundfläche die Anzahlen der gemeinsamen Punkte von je 3 der in (38) bis (40) gefundenen Oerter Π'_0, Π'_1, und Π'_η, und zwar sind es die für jedes Gebüsch von Flächen 2. Grades geltenden Anzahlen:

---

[1]) Cremona, „Grundzüge" (87)

[2]) R. Sturm, Crell. Journ. Bd. 70, „Untersuchungen ü. d. Flächennetz 2. Ordnung." (1), (2), (16), (18), (22).

[3]) Cremona, „Grundzüge" (88)

$$\mu^3 = 1,\ \mu^2\nu = 2,$$
$$\mu^2\rho = 3\ \ \mu\nu^2 = 4,\ \mu\nu\rho = 6$$
$$\mu\rho^2 = 9,\ \ \nu^3 = 8,\ \nu^2\rho = 12$$
$$\nu\rho^2 = 18 \text{ und } \rho^3 = 27,$$

wobei ich die letzte Anzahl im vorliegenden Fall allerdings einer Einschränkung unterwerfen muss.

Denn in dem hier betrachteten Gebüsch von gemischten 2. Polarflächen gibt es 10 Ebenenpaare, die gemischten 2. Polarflächen von P und den 10 Doppelpunkten der zu der 1. Polarfläche von P gehörigen Hesse'schen Fläche; diese Ebenenpaare berühren wieder alle Ebenen des Raumes, und daher muss ich sie von ρ^3 abziehen, so dass $\rho^3 = 17$ [+ 10 Ebenenpaare] ist.

Dann erhalte ich auch nach der in (4) angegebenen Formel (γ) die Anzahl der Ebenenpaare

$$\psi\rho^2 = 2\nu\rho^2 - \mu\rho^2 - \rho^3 = 36 - 9 - 17 = 10.$$

(47) Ich kann hier auch einige andere Anzahlen berechnen.

Ist eine Gerade l gegeben, so geht durch sie eine der Flächen des Gebüsches, weil $\mu^3 = 1$ ist. Der eine Pol dieser Fläche ist P, der zweite der Doppelpunkt der [reinen] Polarfläche von l in Bezug auf die 1. Polarfläche von P nach (18).

Ist eine Ebene η gegeben, so gibt es 4 gemischte 2. Polarflächen in dem Gebüsch, die sie längs einer Gerade berühren; ihre zweiten Pole sind die 4 Doppelpunkte der [reinen] Polarfläche von η in Bezug auf die 1. Polarfläche von P nach (20).

§ 3. System der gemischten 2. Polarflächen der Punkte zweier Geraden.

(48) Es sind 2 Geraden g_1 und g_2 gegeben; ich stelle jeden Punkt der einen Gerade mit jedem der anderen zusammen und erhalte so ∞^2 Punktepaare, deren gemischte 2. Polarflächen ein zweistufiges, aber nicht mehr lineares System bilden.

Der Index dieses Systems ist μ^2, die Anzahl der Flächen, die durch 2 Punkte O_1 und O_2 gehen. Die beiden Pole der Flächen, P_1 auf g_1 und P_2 auf g_2, müssen dann in Bezug auf die reinen (n-2)-ten Polarflächen von O_1 und O_2 konjugiert sein, d. h. P_2 muss auf der Schnittgerade der Polarebenen von P_1 in Bezug auf die beiden reinen (n-2)-ten Polarflächen von O_1 und O_2 liegen. P_1 durchlaufe jetzt die Gerade g_1; dann bilden die Polarebenen von P_1 in Bezug auf jene beiden Flächen 2. Gr. zwei Ebenenbüschel, die in projektiver Beziehung stehen, indem sich zwei Ebenen entsprechen, die zu demselben Punkt P_1 gehören. Diese beiden Ebenenbüschel erzeugen eine Regelfläche 2. Grades R^2, deren Punkte die Eigenschaft haben, zu je ein und demselben Punkt von g_1 in Bezug auf beiden (n-2)-ten Polarflächen konjugiert zu sein.

Mit g_2 hat nun R^2 2 Punkte gemeinsam, so dass die gesuchte Anzahl $\mu^2 = 2$ ist und das 2-stufige System von gemischten 2. Polarflächen mit den Polen auf 2 gegebenen Geraden bei F^4 als Grundfläche den Index 2 hat.

(49) Die Ebenen, welche hier auftreten, sind nach (38) auch Polarebenen von O_1 bezw. O_2 in Bezug auf die 1. Polarflächen der Punkte P_1; an ihre Stelle treten nach (39), wenn ich die Bedingung stelle, dass die gemischte 2. Polarfläche eine Gerade l berühren soll, die reinen Polarflächen Π'_1 von l in Bezug auf die 1. Polarflächen der Punkte P_1 auf g_1. Diese Flächen Π'_1 bilden aber keinen Büschel, sondern ein System 1. Stufe mit dem Index 2. Denn frage ich, wie viel Flächen Π'_1 durch einen Punkt Q gehen, d. h. wie oft es vorkommt, dass die reine vorletzte Polarfläche von Q in Bezug auf die 1. Polarfläche eines Punktes P_1 die l berührt, so finde ich die Zahl 2, da die vorletzten Polarflächen von Q in Bezug auf die 1. Polarflächen der Punkte P_1 auf g_1 so wie diese einen Büschel[1]) und zwar von Flächen 2 Gr. bilden, aus dem 2 Flächen

[1]) Cremona, „Grundzüge“ (74).

die l berühren. Diese Anzahl bleibt auch dieselbe, wenn die Grundfläche eine Fläche n-ter Ordn. wird, da die vorletzten Polarflächen von Q in Bezug auf die 1. Polarflächen von P_1 auf g_1 immer einen Büschel von Flächen 2. Grades bilden. Ich habe mithin den Satz:

„Die reinen Polarflächen einer Gerade in Bezug auf die Flächen eines Büschels bilden ein System 1. Stufe mit dem Index 2.“

Dieses System, das zu l gehört und das ich mit $\overset{2}{\underset{1}{\Sigma}}l$[1]) bezeichnen will, steht in projektiver Beziehung zu dem Büschel der Polarebenen des Punktes O in Bezug auf die 1. Polarflächen von P_1 auf g_1, mit solchen Flächen als entsprechenden, die zu der 1. Polarfläche desselben Punktes P_1 gehören. Die gemeinsamen Punkte entsprechender Elemente haben dann die Eigenschaft, dass bei F^4 als Grundfläche ihre reine 1. oder vorletzte Polarfläche in Bezug auf die 1. Polarfläche eines Punktes P_1 durch O geht und l berührt, also die Bedingung $\mu\nu$ erfüllt.

Das Erzeugnis dieser Punkte wird eine Fläche sein, deren Ordnung ich feststellen muss. Ich nehme auf einer Gerade m einen Punkt X; durch ihn gehen 2 Flächen Π'_1 aus $\overset{2}{\underset{1}{\Sigma}}l$, denen 2 Polarebenen von O entsprechen, welche in m 2 Punkte X′ einschneiden. Durch einen Punkt X′ geht eine Ebene aus dem Büschel der Polarebenen Π'_0 von O, der eine Fläche Π'_1 aus $\overset{2}{\underset{1}{\Sigma}}l$ entspricht, die wieder von m in 2 Punkten X getroffen wird. Die 4 Koinzidenzpunkte der so auf m entstandenen Korrespondenz [2,2] haben dann die Eigenschaft, auf entsprechenden Flächen aus dem Ebenenbüschel und aus dem System der Π'_1 zu liegen; mithin ist das Erzeugnis eine Fläche 4. Ordnung, die Anzahl $\mu\nu = 4$, da auch g_2 die Fläche in 4 Punkten trifft.

---

[1]) Im folgenden ist $\overset{n}{\underset{m}{\Sigma}}$ ein System m-ter Stufe mit dem Index n.

(50) Diese Betrachtungen lassen sich sofort verallgemeinern für einen Büschel von Flächen n′-ter Ordnung und ein einstufiges System mit dem Index 2 von Flächen n″-ter Ordn., die in projektiver Beziehung stehen. Dann entsprechen einem X $2\,n'$ Punkte X′ und einem X′ n'' Punkte X; die Korrespondenz wird dann also $[n'', 2\,n']$, und die erzeugte Fläche erhält die Ordnung $2\,n' + n''$.

„Stehen ein System 1. Stufe mit dem Index 1 von Flächen n′-ter Ordnung und ein System 1. Stufe mit dem Index 2 von Flächen n″-ter Ordnung in projektiver Beziehung, so erzeugen entsprechende Flächen eine Fläche von der Ordnung $2\,n' + n''$."

(51) Liegt die Bedingung ν^2 vor, dass die gemischten 2. Polarflächen, deren Pole auf g_1 bezw. g_2 laufen, zwei gegebene Geraden l_1 und l_2 berühren sollen, so treten die beiden einstufigen Systeme mit dem Index 2 der Flächen Π'_{l_1} und Π'_{l_2} auf. Diese stehen dann in projektiver Beziehung, und ich habe zu untersuchen, wie oft sich entsprechende Flächen auf g_2 schneiden.

Es liegen zwei projektiv bezogene einstufige Systeme mit dem Index 2 von Flächen n''_1-ter und n''_2-ter Ordnung vor; durch einen Punkt X auf m gehen aus dem 1. System 2 Flächen, da der Index ja 2 ist; diesen entsprechen im 2. System 2 Flächen n''_2-ter Ordnung, die m in $2\,n''_2$ Punkte X′ schneiden. Umgekehrt entsprechen jedem X′ $2\,n''_1$ Punkte X; also habe ich eine Korrespondenz $[2\,n''_2, 2\,n''_2]$, deren $2\,n''_1 + 2\,n''_2$ Koinzidenzen Schnittpunkte entsprechender Flächen aus den beiden Systemen sind. Mithin gilt der Satz:

„Stehen 2 einstufige Systeme mit dem Index 2 von Flächen mit der Ordnungszahl n''_1 bezw. n''_2, $\sum_1^2 n''_1$ und $\sum_1^2 n''_2$, in projektiver Beziehung, so ist das Erzeugnis der Projektivität eine Fläche von der Ordnung $2\,(n''_1 + n''_2)$."

Im Falle der Systeme von Π'_{l1} und Π'_{l2} ist $n''_1 = n''_2 = 2$, also ist „$\nu^2 = 2 \cdot 4 = 8$."

(52) (a) Ist eine Bedingung für die gemischte 2. Polarfläche von P_1 und $P_2\rho$, dass die Fläche eine Ebene η berühren soll, so ist analog das System der [reinen] Polarflächen Π'_η von η in Bezug auf die 1. Polarflächen von P_1 auf g_1 zu bilden; dieses System 1. Stufe hat den Index 3, und die Flächen Π'_η sind nach (40) von der Ordnung 3.

Frage ich nämlich, wieviel Flächen Π'_η dieses Systems durch Q gehen, oder wie oft es vorkommt, dass die vorletzte Polarfläche von Q in Bezug auf die 1. Polarfläche eines P_1 die Ebene η berührt, so finde ich 3; denn die vorletzten Polarflächen von Q in Bezug auf die 1. Polarflächen der P_1 bilden ja wieder einen Büschel von Flächen 2. Grades, und eine Ebene η wird von 3 Flächen eines solchen Büschels berührt.

Die Flächen Π'_η bilden also ein System mit dem Index 3.

Der Index bleibt derselbe, wenn die Flächen des Büschels, in Bezug auf welche ich die vorletzten Polarflächen von Q bilde, höherer Ordnung sind. Folglich gilt der Satz:

„Die [reinen] Polarflächen einer Ebene in Bezug auf die Flächen eines Büschels bilden ein System 1. Stufe mit dem Index 3.“

Das System der Π'_η tritt, je nachdem μ, ν oder ρ zu der Bedingung ρ hinzukommen, in projektive Beziehung zu einem Ebenenbüschel, einem System 1. Stufe mit dem Index 2 von Flächen Π'_1 oder wieder einem System 1. Stufe mit dem Index 3 von Flächen Π'_η. Das Erzeugnis wird jedesmal eine Fläche sein, deren Ordnung ich auch für derartige Systeme von Flächen beliebiger Ordn. bestimmen kann.

Ein System 1. Stufe mit dem Index 3 von Flächen n'''_1-ter Ordnung, $\sum_1^3 n'''_1$, stehe in projektiver Beziehung zu einem System 1. Stufe mit dem Index 1, 2, oder 3 von Flächen n'-ter, n''-ter oder n'''_2-ter Ord-

nung, $\sum_1^1 n'$, $\sum_1^2 n''$ oder $\sum_1^3 n'''_2$. Durch einen Punkt X auf m gehen 3 Flächen aus $\sum_1^3 n'''_1$, denen ebensoviel Flächen in $\sum_1^1 n'$, $\sum_1^2 n''$ bezw. $\sum_1^3 n'''_2$ entsprechen, welche die Gerade m in $3n'$, $3n''$ bezw. $3n'''_2$ Punkten X′ treffen. Durch X′ gehen je nachdem 1, 2 oder 3 Flächen aus $\sum_1^1 n'$, $\sum_1^2 n''$ bezw. $\sum_1^3 n'''_2$, denen wieder ebensoviele in $\sum_1^3 n'''_1$ korrespondieren, sodass jedem X′ n'''_1, $2n'''_1$ oder $3n'''_1$ Punkte X zugeordnet sind. Ich erhalte also auf m eine Korrespondenz $[n'''_1, 3n']$, $[2n'''_1, 3n'']$ oder $[3n'''_1, 3n'''_2]$; folglich ist das Erzeugnis eine Fläche von der Ordnung $n'''_1 + 3n'$, bezw. $2n'''_1 + 3n''$ bezw. $3(n'''_1 + n'''_2)$.

„Steht ein System 1. Stufe mit dem Index 3 von Flächen n'''_1-ter Ordnung in projektiver Beziehung zu einem System 1. Stufe mit dem Index a) 1, b) 2, c) 3 von Flächen a) n′-ter, b) n″-ter, c) n'''_2-ter Ordnung, so ist das Erzeugnis der Projektivität eine Fläche von der Ordnung a) $n'''_1 + 3n'$, b) $2n'''_1 + 3n''$ und c) $3(n'''_1 + n'''_2)$.“

Im vorliegenden Fall ist nun $n' = 1$, $n'' = 2$ und $n'''_1 = n'''_2 = 3$, also sind die Anzahlen

$$\mu\rho = 3 + 3 = 6,$$
$$\nu\rho = 2.3 + 3.2 = 12 \text{ und}$$
$$\rho^2 = 3.6 \quad = 18.$$

(52) (b) Schliesslich kann ich noch das System der Hesse'schen Flächen in Bezug auf die 1. Polarflächen der Punkte P_1 von g_1 bilden, und erhalte ein System 1. Stufe mit dem Index 4, da ja die vorletzten Polarflächen eines Punktes Q in Bezug auf die Flächen jenes Büschels wieder einen Büschel und zwar von Flächen 2. Grades bilden, der 4 Kegel 2. Gr. enthält; also gehen durch Q 4 Hesse'sche Flächen.

„Die Hesse'schen Flächen für die Flächen eines Büschels bilden ein System 1. Stufe mit dem Index 4."

Tritt dieses System in projektive Beziehung zu einem der Π'_0, Π'_1 oder Π'_η so sind die Erzeugnisse Flächen von der Ordnung $4+4.1$, $2.4+4.2$, $3.4+4.3$, und die Anzahlen

$$\chi\mu = 8$$
$$\chi\nu = 16 \text{ und}$$
$$\chi\rho = 2.12.$$

Damit sind alle Anzahlen des Systems der gemischten 2. Polarflächen mit den Polen P_1 und P_2 auf g_1 bezw. g_2 berechnet.

§ 4. Das System der gemischten 2. Polarflächen der Punkte einer Gerade und einer Ebene.

(53) Es ist eine Gerade g und eine Ebene ε gegeben; ich stelle jeden Punkt P_1 der Gerade mit jedem Punkt P_2 der Ebene zu einem Punktepaar zasammen, und erhalte so ∞^3 Punktepaare, also ein 3-stufiges System von gemischten 2. Polarflächen.

Die Anzahl μ^3, wieviele der Flächen des Systems durch 3 Punkte gehen, ist leicht zu berechnen. Die beiden Pole P_1, P_2 aller dieser Flächen müssen in Bezug auf die reinen (n-2)-ten Polarflächen der 3 Punkte O_1, O_2, O_3 nach (38) konjugiert sein, d. h. P_2 muss gemeinsamer Punkt der Polarebenen von P_1 in Bezug auf die drei reinen (n-2)-ten Polarflächen von O_1, O_2 und O_3 sein. Lasse ich P_1 jetzt auf g laufen, so bilden die Polarebenen von P_1 je einen Ebenenbüschel, und die Projektivität, welche zwischen diesen 3 Ebenenbüscheln mit windschiefen Achsen besteht, indem Polarebenen desselben Punktes P_1 sich entsprechen, erzeugt eine Raumkurve 3. Ordn.[1]); deren Punkte die Eigenschaft haben, zu je einem Punkte auf g in Bezug auf die 3 reinen (n-2)-ten Polarflächen von O_1, O_2 und O_3 zugleich konjugiert

[1]) Cremona, „Grundzüge" (122).

zu sein. Also liegen in der Ebene ε 3 Punkte dieser Kurve, mithin ist „$\mu^3 = 3$“.

(54) Tritt jetzt eine Gerade l hinzu, die von den Flächen des 3-stufigen Systems berührt werden soll, so wird eines der Ebenenbüschel ersetzt durch das System 1. Stufe mit dem Index 2 der reinen Polarflächen Π'_1 von l in Bezug auf die 1. Polarflächen der Punkte P_1 von g (49). Es besteht dann Projektivität zwischen diesem System $\sum_1^2 \Pi'_1$ und den beiden noch vorhandenen Ebenenbüscheln.

Die beiden projektiven Ebenenbüschel erzeugen eine Regelfläche R^2 2. Grades und diese wird von einer Ebene σ in einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ geschnitten. Durch einen Punkt X auf $\mathfrak{K}$ gehen 2 entsprechende Ebenen aus den beiden Büscheln; denen entspricht eine Fläche Π'_1, welche $\mathfrak{K}$ in 4 Punkten X′ trifft, da Π'_1 eine Fläche 2. Gr. ist; durch X′ gehen 2 Flächen Π'_1, denen je zwei Ebenen der Büschel entsprechen. Diese Ebenen entsprechen sich zu je 2 auch in den Büscheln, sodass ihre 2 Schnittgeraden auf R^2 liegen und $\mathfrak{K}$ in 2 Punkten l treffen; mithin habe ich auf $\mathfrak{K}$ eine Korrespondenz [2, 4], deren 6 Koïnzidenzpunkte Treffpunkte von drei entsprechenden Flächen sind, und so gibt es in jeder Ebene 6 derartige Punkte, also auch in ε, so dass „$\mu^2\nu = 6$“ ist.

Das Resultat kann ich nur bezüglich der Ordnung der Flächen des Systems mit dem Index 2 verallgemeinern, da ich sonst in σ nicht einen Kegelschnitt, sondern eine Kurve von der Ordn. $(n'_1 + n'_2)$ erhielte, für welche das Korrespondenzprinzip von Chasles nur gelten würde, wenn ich weiss, dass die Kurve das Geschlecht 0 hat. Ich habe mithin den Satz:

„Stehen 2 Ebenenbüschel und ein System 1. Stufe mit dem Index 2 von Flächen n″-ter Ordnung in projektiver Beziehung, so ist das Erzeugnis eine Raumkurve von der Ordnung $2 + 2n''$“.

(55) Tritt an die Stelle von ν die Bedingung ρ, so erhalte ich nach (52a) ein einstufiges System mit dem In-

dex 3 von Flächen Π'_η 3. Ordnung, das zu den Ebenenbüscheln projektiv ist. Die Korrespondenz auf $\mathfrak{K}$ wird dann [3, 2·3] oder [3, 6], also „$\mu^2\rho = 9$."

Auch hier kann ich die Ordnung der Flächen des Systems mit dem Index 3 verallgemeinern und erhalte den Satz:

„Stehen 2 Ebenenbüschel und ein System 1. Stufe mit dem Index 3 von Flächen n'''-ter Ordnung in projektiver Beziehung, so ist das Erzeugnis eine Raumkurve von der Ordnung $3 + 2n'''$."

Tritt endlich die Bedingung χ hinzu, so ist das 3. System ein System 1. Stufe mit dem Index 4 der Hesse'schen Flächen H' 4. Ordnung (52b), die Korrespondenz auf $\mathfrak{K}$ wird dann [4, 2·4] und die Anzahl „$\mu^2\chi = 12$."

(56) Bei den weiteren Charakteristiken tritt nur ein Punkt auf. Wenn ich dann also die von 2 projektiven Systemen (50), (51) und (52) erzeugten Flächen mit σ schneide, erhalte ich eine Kurve von höherer als zweiter Ordnung, und für die auf der Kurve bestehende Korrespondenz gilt dann das Prinzip von Chasles nicht mehr, solange man nicht über das Geschlecht der Kurve Bescheid weiss.

Es bietet sich aber eine andere Möglichkeit, die noch fehlenden Anzahlen zu berechnen. So wie ich bisher die Systeme der Π'_0, Π'_1, Π'_η bezw. H' in Bezug auf die Polarflächen der Punkte P_1 von g gebildet habe, kann ich jetzt auch die Systeme jener Flächen für die 1. Polarflächen der Punkte P_2 von ε bilden, wobei ich 2-stufige Syteme erhalten werde, die in eindeutiger Beziehung stehen und Flächen als Erzeugnis haben werden, die ich dann mit g schneiden muss, um die Anzahlen zu erhalten.

(57) Ehe ich aber die Indices dieser 2-stufigen Systeme bestimme, muss ich noch einige Untersuchungen über Systeme 1. Stufe mit dem Index 9 vorausschicken.

Ich habe gefunden, dass die einstufigen Systeme von Flächen Π'_0, Π'_1 und Π'_η und H' mit dem Index 1, 2, 3 bezw. 4 zu den 1. Polarflächen der Punkte einer Gerade gehören;

die in den jetzt vorliegenden 2-stufigen Systemen enthaltenen derartigen Systeme werden mithin den Geraden der Ebene ε zugeordnet sein, und zu derselben Gerade gehörige Systeme werden einander entsprechen.

(a) Nehme ich jetzt anstatt der Gerade eine Kurve ϑ-ter Ordnung, C^{ϑ}, und bilde für ihre ∞^1 Punkte P'_2 die ersten Polarflächen in Bezug auf die Grundfläche, so gehen durch einen beliebigen Punkt Q soviele von ihnen, als in der Polarebene von Q in Bezug auf die Grundfläche Punkte P'_2 liegen, also ϑ, und ich habe so den Satz:

„Die 1. Polarflächen der Punkte einer Kurve ϑ-ter Ordnung in Bezug auf F^n bilden ein System 1. Stufe, mit dem Index ϑ, von Flächen (n-1)-ter Ordnung."

Bilde ich in Bezug auf die 1. Polarflächen der Punkte P'_2 von C^{ϑ} die i-ten Polarflächen eines Punktes Q, so bilden diese wieder ein System 1. Stufe mit dem Index ϑ. Denn soll die i-te Polarfläche eines Punktes Q in Bezug auf die 1. Polarfläche von P'_2 durch Q' gehen, so muss die i-te Polarfläche von Q in Bezug auf die (n-i-1)-te Polarfläche von Q', also die Polarebene von Q in Bezug auf die (n-i-1)-te Polarfläche von Q' durch P'_2 gehen[1]). Diese Polarebene enthält aber ϑ Punkte P'_2 von C^{ϑ}, mithin kommt es auch ϑ-mal vor, dass die i-te Polarfläche von Q in Bezug auf die 1. Polarfläche eines Punktes P'_2 von C^{ϑ} durch Q' geht.

„Die i-ten Polarflächen eines Punktes in Bezug auf die 1. Polarflächen der Punkte von C^{ϑ} bilden ein einstufiges System mit dem Index ϑ von Flächen (n-1-i)-ter Ordnung", das in projektiver Beziehung zu dem System der 1. Polarflächen selbst steht.

(b) Diese beiden Sätze kann ich umkehren:

„Liegt ein System 1. Stufe, mit dem Index ϑ von 1. Polarflächen einer F^n vor, so erfüllen ihre Pole eine Kurve ϑ-ter Ordnung" und

---

[1]) Cremona, „Grundzüge" (84).

„Liegt ein System 1. Stufe, mit dem Index ϑ, von i-ten Polarflächen eines Punktes Q in Bezug auf ein einstufiges System von 1. Polarflächen vor, so bilden die Pole dieser 1. Polarflächen eine Kurve ϑ-ter Ordnung."

Der erste Satz ist leicht zu beweisen; gehen durch einen Punkt Q ϑ 1. Polarflächen, so müssen in der Polarebene von Q die ϑ Pole dieser Flächen liegen und so in jeder Ebene. Nun hat allerdings jede Ebene $(n-1)^3$ Pole, aber diese sind allen 1. Polarflächen der Punkte der Ebene gemein, so dass durch die $(n-1)^3$ Pole dieselben ϑ Flächen des Systems 1. Stufe mit dem Index ϑ von 1. Polarflächen gehen. In jeder Ebene liegen also ϑ Pole; die Pole erfüllen mithin eine Kurve C^ϑ.

Der Beweis für die 2. Umkehrung ist folgendermassen zu führen. Durch einen Punkt Q′ gehen ϑ i-te Polarflächen von Q in Bezug auf die ersten Polarflächen von Punkten P'_2, also müssen in der i-ten Polarfläche oder Polarebene von Q in Bezug auf die (n-i-1)-te Polarfläche von Q′ ϑ Punkte P'_2 liegen, und so wieder in jeder Ebene, wenn ich Q′ den Raum durchlaufen lasse. Die Punkte P'_2 erfüllen also eine Kurve C^ϑ.

Jetzt kann ich den 2. Satz so aussprechen:

„Bilde ich die i-ten Polarflächen eines Punktes Q in Bezug auf die Flächen eines Systems 1. Stufe mit dem Index ϑ, von 1. Polarflächen einer F^n, so erhalte ich wieder ein solches System, das zu dem gegebenen projektiv ist."

(58) Sodann habe ich mit den [reinen] Polarflächen Π'_1 einer Gerade l in Bezug auf die 1. Polarflächen der Punkte von C^ϑ zu tun. Durch einen Punkt Q gehen soviele Flächen Π'_1, als vorletzte Polarflächen von Q in Bezug auf jene 1. Polarflächen die Gerade l berühren. Diese vorletzten Polarflächen bilden nach (57 a) ein System 1. Stufe mit dem Index ϑ von Flächen 2. Grades, und aus diesem berühren nach (10) 2ϑ Flächen eine Gerade. Also gehen durch

einen Punkt Q 2ϑ Flächen Π'_1 aus dem System, das zu den 1. Polarflächen der Punkte von C^ϑ gehört.

„Die [reinen] Polarflächen einer Gerade in Bezug auf die 1. Polarflächen der Punkte einer Kurve ϑ-ter Ordnung bilden ein System 1. Stufe mit dem Index 2ϑ.“ und umgekehrt:

„Jedes System 1. Stufe mit dem Index 2ϑ von Flächen Π'_1 einer festen Gerade l gehört zu den Punkten P'_2 einer Kurve C^ϑ.“

Denn gehen durch Q 2ϑ Flächen Π'_1, so berühren 2ϑ vorletzte Polarflächen von Q in Bezug auf 1. Polarflächen von Punkten P'_2 die l. Dann müssen durch Q' ϑ derartige Flächen gehen; denn wenn x durch Q' gehen, berühren nach (10) 2 x die Gerade l, also ist $x = \vartheta$. Die vorletzten Polarflächen von Q in Bezug auf die 1. Polarflächen von P'_2 bilden ein System 1. Stufe mit dem Index ϑ, folglich erfüllen die P'_2 eine Kurve C^ϑ (57 b), zu der dann auch das System 1. Stufe mit dem Index 2ϑ von Flächen Π'_1 gehört; und zwar muss in dem vorliegenden Fall, wo die Systeme 1. Stufe Untersysteme des zweistufigen zur Ebene ε gehörigen Systems sind, C^ϑ in ε liegen.

(59 a) Ebenso gehört zu einer Kurve C^ϑ ein System 1. Stufe von Flächen Π'_η, und zwar hat es den Index 3ϑ. Denn aus dem System der vorletzten Polarflächen von Q in Bezug auf die 1. Polarflächen der Punkte von C^ϑ berühren nach (10) 3ϑ Flächen eine Ebene η, d. h. 3ϑ Flächen Π'_η gehen durch Q.

„Die [reinen] Polarflächen einer Ebene in Bezug auf die 1. Polarflächen der Punkte einer Kurve ϑ-ter Ordnung bilden ein System 1. Stufe mit dem Index 3ϑ.“

Auch hier gilt die Umkehrung:

„Liegt ein System 1. Stufe von Flächen Π'_η einer Ebene in Bezug auf 1. Polarflächen von Punkten P'_2 mit dem Index 3ϑ vor, so erfüllen die Pole P'_2 eine Kurve C^ϑ.“

Der Beweis ist analog dem in (58).

(b) Endlich kann ich noch beweisen, dass die Hesse'schen Flächen H′ in Bezug auf die 1. Polarflächen der Punkte von C^{ϑ} ein System 1. Stufe mit dem Index $4\,\vartheta$ bilden. Denn das System der vorletzten Polarflächen eines Punktes Q in Bezug auf jene hat nach (57 a) den Index ϑ; in diesem System ist also $\mu = \vartheta$, $\nu = 2\,\vartheta$, und $\rho = 3\,\vartheta$ nach (10), folglich ist $\chi = 2\,\rho - \nu = 4\,\vartheta$ auf Grund der Formel (β) in (4). Das System der vorletzten Polarflächen von Q enthält also $4\,\vartheta$ Kegel. d. h. $4\,\vartheta$ Hesse'sche Flächen H′ gehen durch Q.

„Die Hesse'schen Flächen in Bezug auf die 1. Polarflächen der Punkte einer Kurve ϑ-ter Ordnung bilden ein System 1. Stufe mit dem Index $4\,\vartheta$."

(60) Jetzt will ich die Indices der 2-stufigen Systeme von Π'_0, Π'_1, Π'_μ, und H′, die zu den Punkten von ε gehören, berechnen.

(a) Die Flächen Π'_0 sind die Polarebenen von 0 in Bezug auf die 1. Polarflächen der Punkte P_2 von ε; sie bilden einen Bündel[1]), ein 2-stufiges System von Ebenen mit dem Index 1, und jedes System 1. Stufe mit dem Index ϑ aus diesem Bündel gehört nach (57 b) zu einer Kurve C^{ϑ} in ε.

(b) Die Flächen Π'_1 sind die [reinen] Polarflächen einer Gerade l in Bezug auf die 1. Polarflächen der Punkte P_2 von ε; ich frage, wie viele durch zwei Punkte Q_1 und Q_2 gehen. Wenn Q_1 und Q_2 auf einer Π'_1 liegen sollen, müssen die reinen vorletzten Polarflächen von Q_1 und Q_2 in Bezug auf die 1. Polarfläche eines Punktes P_2 die l berühren. Nun bilden die vorletzten Polarflächen von Q_1 und Q_2 in Bezug auf die ersten der Punkte P_2 von ε je ein Netz von Flächen 2. Grades[1]), und die beiden Netze sind kollinear, mit solchen Flächen als entsprechenden, die zu derselben 1. Polarfläche gehören. Ich habe also zu untersuchen, wie oft es vorkommt, dass entsprechende Flächen aus den beiden Netzen, N_1 und N_2, eine Gerade l berühren. Dies ist nur ein spezieller Fall der Zahl, welche

[1]) Cremona, „Grundzüge" (74) u. (87)

angibt, wie oft entsprechende Flächen aus den beiden kollinearen Netzen N_1 und N_2 je eine von 2 gegebenen Geraden g_1 und g_2 berühren, oder wenn ich durch die beiden Geraden 2 Ebenen lege, wie oft entsprechende Kegelschnitte aus den von den Ebenen ausgeschnittenen kollinearen Kegelschnittnetzen je eine der beiden Geraden berühren. Die Kegelschnitte nun, welche eine Gerade berühren, bilden in einem Netz ein System 1. Stufe mit dem Index 2, da für ein derartiges Netz nach (45) $\mu\nu = 2$ ist. Zu jedem Büschel gibt es also 2 Kegelschnitte, welche g_1 bezw. g_2 berühren. Bilde ich nun die beiden kollinearen Netze kollinear in ein Punktfeld ab, so dass 2 entsprechende Kegelschnitte in denselben Punkt abgebildet werden, so gehen 2 entsprechende Büschel in eine Gerade über. In jedem Büschel habe ich nun 2 Kegelschnitte, welche g_1 bezw. g_2 berühren, folglich auf jeder Gerade des Feldes 2 Punkte, in die derartige Kegelschnitte abgebildet sind. So erhalte ich in dem Feld 2 Kurven 2. Ordnung, deren 4 gemeinsame Punkte die Eigenschaft haben, dass ihnen Kegelschnitte der beiden Netze entsprechen, die g_1 und andererseits g_2 berühren. Diese 4 Paar Kegelschnitte entsprechen sich dann auch nach der Art der Abbildung in den kollinearen Netzen, und ich kann daraus schliessen, dass die gesuchte Anzahl 4 ist. Mithin kommt es 4 - mal vor, dass entsprechende vorletzte Polarflächen von Q_1 und Q_2 die 1 berühren, oder dass eine Fläche Π'_1 durch Q_1 und Q_2 geht. Das System 2. Stufe der Π'_1 hat den Index 4[1]).

Der Beweis bleibt richtig, wenn ich eine F_n als Grundfläche nehme, da die vorletzten Polarflächen von Q_1 in Bezug auf 1. Polarflächen immer vom 2. Grade sind; mithin habe ich den Satz:

---

[1]) Diesen Beweis sowie die Methode der Berechnung der Anzahl der Ebenenpaare in (63 c), des Index 48 in (66 b), und der Ordnung der Kurven in (80 c) verdanke ich der gütigen Anregung von Herrn Prof. Dr. Sturm.

„Die [reinen] Polarflächen einer Gerade l in Bezug auf die Flächen eines Netzes bilden ein 2-stufiges System mit dem Index 4.“

(c) Ganz analog verläuft der Beweis dafür, dass die Flächen Π'_{η}, die zu einer Ebene η und zu den 1. Polarflächen der Punkte P_2 von ε gehören ein System 2. Stufe mit dem Index 9 bilden. Es ist dabei zu untersuchen, wie oft entsprechende Flächen aus den beiden kollinearen Netzen von Flächen 2. Grades, N_1 und N_2, die Ebene η oder je eine von 2 gegebenen Ebenen η_1 und η_2 berühren, d. h. wie oft entsprechende Kegelschnitte der von η_1 und η_2 ausgeschnittenen kollinearen Kegelschnittnetze zugleich Geradenpaare sind. Da nun in jedem Büschel eines solchen Netzes 3 Geradenpaare enthalten sind, bekomme ich durch die in (b) beschriebene Abbildung in dem Punktfelde 2 Kurven 3. Ordnung mit 9 gemeinsamen Punkten, denen in beiden Netzen Geradenpaare zugeordnet sind, die dann wieder einander entsprechen. Mithin kommt es 9 mal vor, dass entsprechende Flächen η_1 bezw. η_2 oder zugleich η berühren, sodass ich den Satz aufstellen kann:

„Liegen 2 kollineare Netze von Flächen 2. Grades vor, so geschieht es 4- bezw. 9-mal, dass entsprechende Flächen aus ihnen eine Gerade bezw. eine Ebene oder je eine von 2 gegebenen Geraden bezw. Ebenen berühren.“

Danach ist die Anzahl der Flächen Π'_{η}, welche durch Q_1 und Q_2 gehen, 9; auch hier kann ich verallgemeinern und habe den Satz:

„Die [reinen] Polarflächen einer Ebene in Bezug auf die Flächen eines Netzes bilden ein 2stufiges System mit dem Index 9.“

Will ich den Index des 2-stufigen Systems der Hesse'schen Flächen H′ für die ersten Polarflächen der Punkte von ε, d. h. die Anzahl der Flächen H′ berechnen, welche durch Q_1 und Q_2 gehen, so muss ich untersuchen, wie oft es vorkommt, dass in den beiden kollinearen Netzen N_1 und N_2 zwei Kegel einander entsprechen. Denn entsprechen

sich unter den vorletzten Polarflächen von Q_1 und Q_2 2 Kegel, so heisst das, die vorletzten Polarflächen von Q_1 und Q_2 in Bezug auf die 1. Polarfläche eines Punktes von ε sind Kegel, oder Q_1 und Q_2 liegen auf der zu dieser Fläche gehörigen H'. Die ∞^1 Kegel des Netzes N_1 bilden ein System 1. Stufe mit dem Index 4; denn durch jeden Punkt gehen die 4 Kegel des durch ihn bestimmten Büschels. Diesen 4 Kegeln nun entsprechen in N_2 4 Flächen 2. Grades des entsprechenden Büschels, dem ganzen System der Kegel, also ein System 1. Stufe von Flächen 2. Grades wiederum mit dem Index 4, und in ihm sind nach (10) die Anzahlen $\nu = 2.4. = 8$ und $\rho = 3.4 = 12$, also $\chi = 2\rho - \nu = 16$. So habe ich den Satz:

„In 2 kollinearen Netzen von Flächen 2. Grades kommt es 16-mal vor, dass 2 Kegel einander entsprechen."

Demnach ist die Anzahl der Flächen H' durch Q_1 und Q_2 16, und wenn ich die Ordnung der Ausgangsfläche verallgemeinere, erhalte ich den Satz:

„Die Hesse'schen Flächen für die Flächen eines Netzes bilden ein 2-stufiges System mit dem Index 16."

Dieses System werde ich jedoch nicht weiter verfolgen, da die Anzahlen der Kegel einfacher mit Hilfe der Ausartungsformel berechnet werden können.

(61) Die 3 zweistufigen Systeme von Flächen Π'_0, Π'_1, Π'_η mit dem Index 1, 4 und 9, die zu den Punkten von ε gehören, stehen in eindeutiger Beziehung, indem sich Flächen entsprechen, die in Bezug auf die erste Polarfläche ein und desselben Punktes von ε gebildet sind, und zwar ist das Entsprechen derartig, dass zu einer Kurve ϑ-ter Ordnung in ε entsprechende Systeme 1. Stufe mit dem Index ϑ, 2ϑ bezw. 3ϑ aus dem System 2. Stufe von Flächen Π'_0, Π'_1 bezw. Π'_η gehören.

Die Ordnung der Fläche nun, welche die Schnittpunkte von je 3 entsprechenden Flächen der 3 zweistufigen Systeme erfüllen, habe ich festzustellen, wobei ich die 3

verschiedenen Arten der Systeme auf alle Weisen zu je 3 zusammenstellen muss. Ich kann dabei die Ordnung der Flächen der 2-stufigen Systeme beliebig annehmen, und werde die Ordnungszahlen bei den Systemen mit Index 1 mit n', mit Index 2^2 mit n'' und mit Index 3^2 mit n''' bezeichnen, sodass für den Spezialfall $n' = 1$, $n'' = 2$ uud $n''' = 3$ zu setzen ist.

(62) Stehen 3 zweistufige Systeme mit dem Index 1 in dieser Beziehung, so nennt man sie kollinear, und wenn die Ordnung der Flächen n'_1, n'_2 bezw. n'_3 ist, so ist das Erzeugnis eine Fläche von der Ordnung $(n'_1 + n'_2 + n'_3)$[1]. Im Spezialfall ist $n'_1 = n'_2 = n'_3 = 1$, also die Fläche 3. Ordnung; folglich gibt es auf g 3 Punkte, die zu je einem in ε in Bezug auf die vorletzten Polarflächen von 0_1, 0_2 und 0_3 konjugiert sind, also ist „$\mu^3 = 3$“, wie bereits festgestellt.

„Stehen 2 Systeme 2. Stufe mit dem Index 1 von Flächen n'_1-ter uud n'_2-ter Ordnung, $\overset{1}{\underset{2}{\Sigma}} n'_1$, und $\overset{1}{\underset{2}{\Sigma}} n'_2$, und ein System 2. Stufe mit dem Index 4 $\overset{4}{\underset{2}{\Sigma}} n''$ von Flächen n''-ter Ordnung in der beschriebenen Beziehung, so ist das Erzeugnis eine Fläche von der Ordnung $2\,(n'_2 + n'_2) + n''$.“

Auf einer Gerade m nehme ich einen Punkt X; dann kommt es einmal vor, dass ein Paar entsprechender Flächen aus $\overset{1}{\underset{2}{\Sigma}} n'_1$ und $\overset{1}{\underset{2}{\Sigma}} n'_2$ durch X gehen[2]. Diesen entspricht eine Fläche aus $\overset{4}{\underset{2}{\Sigma}} n''$, welche m in n'' Punkten X′ schneidet. Durch einen Punkt X′ gehen andererseits ∞^1 Flächen aus $\overset{4}{\underset{2}{\Sigma}} n''$, die ein System 1. Stufe mit dem Index 4 bilden, da $\mu^2 = 4$ ist; diesem System entspricht je ein System 1.

---

[1]) Cremona, „Grundzüge“ (127)

[2]) Cremona, „Grundzüge“ (126)

Stufe mit dem Index 2 aus $\overset{1}{\underset{2}{\Sigma}} n'_1$ und $\overset{1}{\underset{2}{\Sigma}} n'_2$ (61) in projektiver Beziehung, deren Erzeugnis nach (51) eine Fläche von der Ordnung 2 $(n'_1 + n'_2)$ ist, die m in 2 $(n'_1 + n'_2$ Punkten X schneidet. Ich erhalte so auf m eine Korrespondenz $[2\ (n'_1 + n'_2),\ n'']$, deren 2 $(n'_1 + n'_2) + n''$ Koïnzidenzpunkte Schnittpunkte von 3 entsprechenden Flächen aus $\overset{1}{\underset{2}{\Sigma}} n'_1, \overset{1}{\underset{2}{\Sigma}} n'_2$ und $\overset{4}{\underset{2}{\Sigma}} n''$ sind.

Im Spezialfall ist wieder $n'_1 = n'_2 = 1$ und $n'' = 2$, die Ordnung der erzeugten Fläche also 6, mithin $\mu^2\nu = 6$ (54).

„Tritt an die Stelle des Systems 2. Stufe mit dem Index 4 ein System 2. Stufe mit dem Index 9 von Flächen n'''-ter Ordnung, so ist das Erzeugnis eine Fläche von der Ordnung $3(n'_1 + n'_2) + n'''$".

Der Beweis ist ganz ähnlich zu führen, nur geht durch X' ein System 1. Stufe mit dem Index 9, dem nach (61) je eins mit dem Index 3 aus $\overset{1}{\underset{2}{\Sigma}} n'_2$ und $\overset{1}{\underset{2}{\Sigma}} n'_2$ entspricht, deren Erzeugnis eine Fläche von der Ordnung 3 $(n'_1 + n'_2)$ ist (52).

Im Spezialfall ist $n''' = 3$, also die Ordnung des Erzeugnisses $6 + 3 = 9$, mithin „$\mu^2\rho = 9$" (55).

(63) (a) Treten jetzt 2 Systeme 2. Stufe mit dem Index 4 oder 9 auf, so muss ich erst untersuchen, wie oft es vorkommt, dass entsprechende Flächen aus ihnen durch einen Punkt gehen.

„Stehen ein System 2. Stufe mit dem Index 1, $\overset{1}{\underset{2}{\Sigma}}$, und ein System 2. Stufe mit dem Index 4, $\overset{4}{\underset{2}{\Sigma}}$, in der oben (61) beschriebenen Beziehung, so kommt es zweimal vor, dass ein Paar entsprechender Flächen durch einen Punkt gehen.

Durch P geht aus $\overset{1}{\Sigma}$ ein System 1. Stufe mit dem Index 1; dem entspricht in $\overset{4}{\underset{2}{\Sigma}}$ ein System 1. Stufe mit dem Index 2,

aus dem also 2 Flächen durch P gehen, die dann in P ihre entsprechenden aus $\overset{1}{\underset{2}{\Sigma}}$ treffen.

Der Beweis ist für die übrigen Fälle ganz analog; ich will ihn noch für den Fall, dass beide 2-stufigen Systeme den Index 9 haben, durchführen.

Durch P gehen aus dem 1. System $\overset{9}{\underset{2}{\Sigma_1}}$ ∞^1 Flächen, die ein System 1. Stufe mit dem Index 9 bilden, da ja durch P und einen 2. Punkt stets 9 Flächen gehen; diesem System 1. Stufe aus $\overset{9}{\underset{2}{\Sigma_1}}$ entspricht ein ebensolches in $\overset{9}{\underset{2}{\Sigma_2}}$, so dass sich in P 9 Paar entsprechender Flächen treffen. Ich kann also den Satz aussprechen:

Stehen zwei 2-stufige Systeme

a) $\overset{1}{\underset{2}{\Sigma}} n'_1$ und $\overset{1}{\underset{2}{\Sigma}} n'_2$, b) $\overset{1}{\underset{2}{\Sigma}} n'$ und $\overset{4}{\underset{2}{\Sigma}} n''$,

c) $\overset{1}{\underset{2}{\Sigma}} n'$ und $\overset{9}{\underset{2}{\Sigma}} n'''$, d) $\overset{4}{\underset{2}{\Sigma}} n''_1$ und $\overset{4}{\underset{2}{\Sigma}} n''_2$,

e) $\overset{4}{\underset{2}{\Sigma}} n''$ und $\overset{9}{\underset{2}{\Sigma}} n'''$, f) $\overset{9}{\underset{2}{\Sigma}} n'''_1$ und $\overset{9}{\underset{2}{\Sigma}} n'''_2$

in der beschriebenen Beziehung, so kommt es a) 1-mal, b) 2-mal, c) 3-mal, d) 4-mal, e) 6-mal und f) 9-mal vor, dass ein Paar entsprechender Flächen durch einen Punkt P geht."

(b) Mit Hilfe dieses Satzes kann ich die Untersuchungen fortsetzen.

Die genannte Beziehung bestehe zwischen $\overset{1}{\underset{2}{\Sigma}} n'$, $\overset{4}{\underset{2}{\Sigma}} n''_1$ und $\overset{4}{\underset{2}{\Sigma}} n''_2$. Durch X auf m gehen nach (63 a) 4 Paare entsprechender Flächen aus $\overset{4}{\underset{2}{\Sigma}} n''_1$ und $\overset{4}{\underset{2}{\Sigma}} n''_2$; denen entsprechen 4 Flächen in $\overset{1}{\underset{2}{\Sigma}} n'$, welche m in 4 n' Punkten X' schneiden. Durch X' geht ein System $\overset{1}{\underset{1}{\Sigma}} n'$ aus $\overset{1}{\underset{2}{\Sigma}} n'$, dem je ein System mit dem Index 2, $\overset{2}{\underset{1}{\Sigma}} n''_1$ und $\overset{2}{\underset{1}{\Sigma}} n''_2$, aus $\overset{4}{\underset{2}{\Sigma}} n''_1$ und $\overset{4}{\underset{2}{\Sigma}} n''_2$

entspricht; das Erzeugnis dieser beiden einstufigen Systeme ist nach (51) eine Fläche von der Ordnung $2\ (n''_1 + n''_2)$, die in ebensovielen Punkten X die m trifft. Die Korrespondenz auf m ist mithin $[2(n_1'' + n''_2),\ 4\ n']$, die erzeugte Fläche also von der Ordnung $2\ (n''_1 + n''_2) + 4\ n'$.

Im Spezialfall ist $n'_1 = 1$, $n_1'' = n''_2 = 2$, die Ordnung also $8 + 4 = 12$, sodass „$\mu\nu^2 = 12$“ ist.

Der Beweis gestaltet sich für die übrigen Fälle ganz ähnlich; ich will darum den Satz bald für alle Fälle zusammenfassen und bezeichne dabei ein System 2. Stufe mit dem Index z von Flächen n-ter Ordnung mit $\overset{z}{\underset{2}{\Sigma}}\ n$. Dann erhalte ich:

Stehen 3 Systeme

1) $\overset{1}{\underset{2}{\Sigma}}\ n'_1,\ \overset{1}{\underset{2}{\Sigma}}\ n'_2,\ \overset{1}{\underset{2}{\Sigma}}\ n'_3,$

2) $\overset{1}{\underset{2}{\Sigma}}\ n'_1,\ \overset{1}{\underset{2}{\Sigma}}\ n'_2,\ \overset{4}{\underset{2}{\Sigma}}\ n'',$

3) $\overset{1}{\underset{2}{\Sigma}}\ n'_1,\ \overset{1}{\underset{2}{\Sigma}}\ n_2,\ \overset{9}{\underset{2}{\Sigma}}\ n''',$

4) $\overset{1}{\underset{2}{\Sigma}}\ n',\ \overset{4}{\underset{2}{\Sigma}}\ n''_1,\ \overset{4}{\underset{2}{\Sigma}}\ n''_2$

5) $\overset{1}{\underset{2}{\Sigma}}\ n',\ \overset{4}{\underset{2}{\Sigma}}\ n'',\ \overset{9}{\underset{2}{\Sigma}}\ n''',$

6) $\overset{1}{\underset{2}{\Sigma}}\ n',\ \overset{9}{\underset{2}{\Sigma}}\ n'''_1,\ \overset{9}{\underset{2}{\Sigma}}\ n'''_2,$

7) $\overset{4}{\underset{2}{\Sigma}}\ n''_1,\ \overset{4}{\underset{2}{\Sigma}}\ n''_2,\ \overset{4}{\underset{2}{\Sigma}}\ n''_3,$

8) $\overset{4}{\underset{2}{\Sigma}}\ n''_1,\ \overset{4}{\underset{2}{\Sigma}}\ n''_2,\ \overset{9}{\underset{2}{\Sigma}}\ n''',$

9) $\overset{4}{\underset{2}{\Sigma}}\ n'',\ \overset{9}{\underset{2}{\Sigma}}\ n'''_1,\ \overset{9}{\underset{2}{\Sigma}}\ n'''_2$ und

10) $\overset{9}{\underset{2}{\Sigma}}\ n'''_1,\ \overset{9}{\underset{2}{\Sigma}}\ n'''_2,\ \overset{9}{\underset{2}{\Sigma}}\ n'''_3$

in der oben beschriebenen eindeutigen Beziehung, so ist das Erzeugnis eine Fläche von der Ordnung:

1) $n'_1 + n'_2 + n'_3$, 2) $2\,(n'_1 + n'_2) + n''$,
3) $3\,(n'_1 + n'_2) + n'''$, 4) $2\,(n''_1 + n''_2) + 4\,n'$,
5) $2\,n''' + 3\,n'' + 6\,n'$, 6) $3\,(n'''_1 + n'''_2) + 9\,n'$,
7) $4\,(n''_1 + n''_2 + n''_3)$, 8) $6\,(n''_1 + n''_2) + 4\,n'''$,
9) $6\,(n'''_1 + n'''_2) + 9\,n''$, 10) $9\,(n'''_1 + n'''_2 + n'''_3)$."

Bei der Berechnung der Zahlen von 6) bis 10) brauche ich die Verallgemeinerung des Satzes aus (51):

„Stehen 2 Systeme 1. Stufe mit dem Index ϑ_1 bezw. ϑ_2 von Flächen n_1-ter bezw. n_2-ter Ordnung in eindeutiger Beziehung, so ist das Erzeugnis eine Fläche von der Ordnung $\vartheta_2\, n_1 + \vartheta_1\, n_2$."

Durch einen Punkt X auf m gehen ϑ_1 Flächen n_1-ter Ordnung, denen ϑ_1 Flächen n_2-ter Ordnung entsprechen, welche m in $\vartheta_1 \cdot n_2$ Punkten X′ schneiden; umgekehrt sind jedem X′ $\vartheta_2 \cdot n_1$ Punkte X zugeordnet, sodass es auf m $\vartheta_2\, n_1 + \vartheta_1 n_2$ Punkte gibt, in denen sich entsprechende Flächen schneiden.

(63) (c) Wenn ich die Anzahlen für den Spezialfall berechnen will, muss ich $n' = 1$, $n'' = 2$ und $n''' = 3$ setzen und erhalte dann

„$\mu^3 = 3$, $\mu^2\nu = 6$, $\mu^2\rho = 9$, $\mu\nu^2 = 12$, $\mu\nu\rho = 18$,
$\mu\rho^2 = 27$, $\nu^3 = 24$, $\nu^2\rho = 36$, $\nu\rho^2 = 54$"

und [$\rho^3 = 81$]; ferner ergibt sich durch Anwendung der Formel (β) aus (4).

„$\mu^2\chi = 12$, $\mu\nu\chi = 24$, $\nu^2\chi = 48$, $\nu\rho\chi = 2.36$"
und [$\rho^2\chi = 4.27$].

Hier sind die Anzahlen $\rho^3 = 81$ und $\rho^2\chi = 4.27$ zu hoch, wegen der in endlicher Anzahl auftretenden Ebenenpaare. Um diese Anzahlen festzustellen, muss ich ein anderes Verfahren einschlagen.

Bilde ich für die 1. Polarfläche eines Punktes P_1 auf g, die ja eine F^3 ist, die 1. Polarflächen aller Punkte P_2 von ε, so gibt es unter diesen ∞^1 Kegel 2. Grades, deren Doppelpunkte die Kurve 6. Ordnung erfüllen, längs der die [reine] Polarfläche von ε in Bezug auf jene F^3 die zu dieser gehörige Hesse'sche Fläche berührt[1]). Diese Kurve ist also die Kurve der Kegelspitzen und die Gesamtheit aller

[1]) Cremona, „Mémoire" (47).

solcher Kurven, die ich erhalte, wenn P_1 die g durchläuft, bilden die Fläche der Kegelspitzen der α^2 Kegel des 3-stufigen Systems. Diese Fläche ist mithin das Erzeugnis der eindeutigen Zuordnung zwischen dem System 1. Stufe mit dem Index 3 der Polarflächen von ε in Bezug auf die 1. Polarflächen der Punkte von g (52a) und dem System 1. Stufe mit dem Index 4 der Hesse'schen Flächen für die Flächen jenes Büschels (52b). Die eindeutige Zuordnung dieser beiden Systeme von Flächen 3. Ordnung mit dem Index 3 und Flächen 4. Ordnung mit dem Index 4 ruft auf einer Gerade eine Korrespondenz [12,12] hervor; die erzeugte Fläche wäre demnach 24. Ordnung, wenn sich entsprechende Flächen nicht durchweg berühren würden; dadurch wird die Ordnung auf 12 erniedrigt. Also liegen auf jeder Gerade 12 Kegelspitzen von Kegeln des Systems, d. h. 12 Kegel erfüllen die Bedingung ρ^2, da ihre Spitzen auf der Schnittgerade der 2 Ebenen liegen; sie aber zählen nach (14) 4-fach, mithin ist „$\chi\rho^2 = 4.12 = 48$“.

Jetzt folgt aus $2\rho - \nu = \chi$ oder $2\rho^3 - \nu\rho^2 = \chi\rho^2$

$$\rho^3 = {}^1/_2\,(48 + 54) = 51$$

und $\psi\rho^2 = 2\rho^2\nu - \rho^2\mu - \rho^3 = 108 - 27 - 51 = 30$.

Mithin ist „$\rho^3 = 51$“ und die Anzahl der Ebenenpaare in dem System „$\psi = 30$“.

§ 5. Weitere Untersysteme von gemischten 2. Polarflächen zweier Punkte.

(64) Es sind zwei Ebenen ε_1 und ε_2 gegeben; ich stelle jeden Punkt P_1 von ε_1 mit jedem Punkt P_2 von ε_2 zusammen und erhalte so α^4 Punktepaare und in ihren gemischten 2. Polarflächen ein 4-stufiges System, für das ich μ^4 berechnen kann.

Soll die gemischte 2. Polarfläche von P_1 und P_2 durch O_1, O_2, O_3 und O_4 gehen, so muss nach (38) P_2 in den 4 Polarebenen von $O_1, \ldots O_4$ in Bezug auf die 1. Polarfläche von P_1 liegen; die Polarebenen aber von $O_1, \ldots O_4$ in Bezug auf die 1. Polarflächen aller Punkte P_1 von ε_1 bilden 4 kollineare Ebenennetze, und diese erzeugen eine

Kurve 6-ter Ordnung[1]), deren Punkte der für P_2 aufgestellten Bedingung genügen. In ε_2 liegen also 6 derartige Punkte, mithin ist

„$\mu^4 = 6$“.

Die übrigen Anzahlen kann ich mit Hilfe des Satzes (10) successive berechnen. Aus $\mu^3\mu = 6$ folgt „$\mu^3\nu = 12$“, „$\mu^3\rho = 18$“; aus $\mu^3\nu = \mu^2\nu.\mu = 12$ weiter „$\mu^2\nu^2 = 24$, $\mu^2\nu\rho = 36$“; aus $\mu^2\rho\mu = 18$ „$\rho^2\nu\rho = 36$, $\mu^2\rho^2 = 54$“; aus $\mu^2\nu^2 = \mu\nu^2.\mu = 24$ folgt „$\mu\nu^3 = 48$, $\mu\nu^2\rho = 72$“; aus $\mu^2\rho^2 = 54$ „$\mu\nu\rho^2 = 108$“, [$\mu\rho^3 = 162$]; aus $\mu\nu^3 = 48$ folgt „$\nu^4 = 96$, $\nu^3\rho = 144$“ und aus $\mu\nu\rho^2 = 108$ „$\nu^2\rho^2 = 216$“, [$\nu\rho^3 = 324$] und endlich aus [$\mu\rho^3 = 162$, $\rho^4 = 486$].

Die Anzahlen $\mu\rho^3 = 162$, $\nu\rho^3 = 324$ und $\rho^4 = 486$ sind wegen der Ebenenpaare, welche in den durch μ, ν, ρ ausgeschiedenen 3-stufigen Systemen auftreten, zu hoch. Der Versuch aber sie in ähnlicher Weise zu berechnen wie ρ^3 in (63c), führt zu sehr umfangreichen und komplizierten Untersuchungen.

(65) Lasse ich P_1 eine Ebene ε und P_2 den ganzen Raum durchlaufen, so erhalte ich ein 5-stufiges System von gemischten 2. Polarflächen für das ich μ^5 ganz ähnlich berechnen kann.

Die Anzahl μ^5 ist zu berechnen entweder als die Zahl der Punkte im Raume, in die 5 entsprechende Ebenen aus den 5 kollinearen Netzen der Polarebenen von O_1, O_2, .. O_5 in Bezug auf die 1. Polarflächen von P_1 in ε zusammenlaufen — diese ist 10[2]) — oder als die Ordnung der Kurve, welche von den 5 kollinearen Ebenengebüschen oder Ebenenräumen der Polarebenen von O_1,... O_5 in Bezug auf die 1. Polarflächen von P_2 im Raume erzeugt wird, und diese ist auch 10-ter Ordnung[3]).

---

[1]) Cremona, „Grundzüge“ (129).
[2]) Cremona, Grundzüge (131).
[3]) Cremona, „Grundzüge“ (140).

Mithin ist „$\mu^5 = 10$“ und aus dieser Anzahl kann ich die übrigen nach (10) in derselben Weise wie in (64) berechnen.

(66) Bilde ich hier die [reinen] Polarflächen einer Gerade l bezw. einer Ebene η in Bezug auf die 1. Polarflächen sämtlicher Punkte P_2 des Raumes, so erhalte ich Systeme 3. Stufe von Flächen Π'_l und Π'_η.

In diesen sind wieder Systeme 2. Stufe mit bestimmten Index enthalten, die zu den Punkten P'_2 einer Fläche ϑ-ter Ordnung gehören.

(a) Ich bilde zunächst die 1. Polarflächen der Punkte P'_2 von F^ϑ und dann in Bezug auf sie die i-ten Polarflächen eines festen Punktes Q. Es ist die Frage, wie viele dieser Flächen durch 2 Punkte gehen. Soll die 1. Polarfläche von P'_2 durch Q_1 und Q_2 gehen, so muss P'_2 in den Polarebenen von Q_1 und Q_2, d. h. auf deren Schnittgerade liegen, welche F^ϑ in ϑ-Punkten trifft. Also gehen durch Q_1 und Q_2 ϑ 1. Polerfläche der Punkte von F^ϑ. Soll andererseits die i-te Polarfläche von Q in Bezug auf die 1. Polarfläche von P'_2 auf F^ϑ durch Q'_1 und Q'_2 gehen, so muss P'_2 auf der i-ten Polarfläche oder Polarebene von Q in Bezug auf die (n-i-1)-te Polarfläche von Q'_1 und Q'_2 d. h. auf deren Schnittgerade und F^ϑ liegen; mithin gehen durch Q'_1 und Q'_2 auch ϑ derartige Flächen.

„Die i-ten Polarflächen eines Punktes in Bezug auf die 1. Polarflächen der Punkte einer F^ϑ bilden so wie diese 1. Polarflächen selbst ein System 2. Stufe mit dem Index ϑ.“

Die Umkehrung dieses Satzes ist ähnlich der in (57) zu beweisen.

(b) Bilde ich jetzt in Bezug auf die 1. Polarflächen der Punkte P'_2 von F^ϑ die [reinen] Polarflächen einer Gerade l, so erhalte ich ein System 2. Stufe von Flächen Π'_l. Durch 2 Punkte Q'_1 und Q'_2 gehen soviele Π'_l, als entsprechende vorletzte Polarflächen von Q'_1 und Q'_2 in

Bezug auf die 1. Polarflächen der P'_2 die Gerade l berühren.

Aus den sämtlichen 1. Polarflächen der F^4 nehme ich einen Büschel heraus, so dass die Pole auf einer Geraden m liegen. Die vorletzten Polarflächen von Q'_1 in Bezug auf diese Flächen bilden dann wieder einen Büschel, aus dem 2 Flächen die l berühren. Also gibt es in dem Büschel der 1. Polarflächen 2 Flächen, in Bezug auf welche die quadratische Polare von Q'_1 die l berührt, oder in Bezug auf welche die Polarfläche von l durch Q'_1 geht, und so liegen auf jeder Gerade m 2 Pole, deren 1. Polarflächen diese Eigenschaft besitzen, so dass alle eine Fläche 2. Ordnung erfüllen. Eine ebensolche Fläche gehört zu Q'_2, und die Schnittkurve 4. Ordnung beider Flächen ist der Ort der Punkte, in Bezug auf deren 1. Polarflächen, die Polarfläche von l durch Q'_1 und Q'_2 geht. Mit der Fläche F^ϑ auf der sich der Pol der 1. Polarflächen bewegen soll, hat diese Kurve 4ϑ Punkte gemein, mithin hat das System der Π'_1 in Bezug auf die 1. Polarflächen der Punkte von F^ϑ den Index 4ϑ, da 4ϑ Flächen Π'_1 durch 2 Punkte gehen.

Ganz ähnlich lässt sich zeigen, dass das System der Π'_{η} und der Hesse'schen Flächen in Bezug auf die 1. Polarflächen von P'_2 auf F^ϑ den Index 9ϑ bezw. 16ϑ hat, so wie ich es in (69 c d) für $\vartheta = 1$ festgestellt habe.

„Die [reinen] Polarflächen einer Gerade bezw. Ebene oder die Hesse'schen Flächen in Bezug auf die 1. Polarflächen der Punkte einer Fläche ϑ-ter Ordnung bilden ein System 2. Stufe mit dem Index 4ϑ, 9ϑ bezw. 16ϑ."

(67) Jetzt will ich noch die 3-stufigen Systeme der Π'_1, Π'_{η} und H' in Bezug auf die 1. Polarflächen aller Punkte des Raumes untersuchen. Durch 3 Punkte Q_1, Q_2, Q_3 gehen soviele Flächen, als entsprechende vorletzte Polarflächen der 3 Punkte, d. h. solche, die in Bezug auf dieselbe 1. Polarfläche gebildet sind, die Gerade bezw. Ebene

berühren oder zugleich Kegel sind. Nehme ich nun die 3 kollinearen Gebüsche G_1, G_2, G_3 der vorletzten Polarflächen von Q_1, Q_2, Q_3 in Bezug auf alle 1. Polarflächen, so berühren aus G_1 ∞^2 Flächen die 1 bezw. ε und sind ∞^2 Flächen aus G_1 Kegel, und zwar bilden diese ein System 2. Stufe mit dem Index 2, 3 bezw. 4, da im Gebüsch von Flächen 2. Grades $\mu^2\nu = 2$, $\mu^2\rho = 3$, $\mu^2\chi = 4$ ist (46). Diese Systeme gehören also nach (66a) zu den Punkten einer F^2, F^3 bezw. F^4, und es entspricht ihnen je ein System 2. Stufe mit dem Index 2, 3, bezw. 4 in G_2 und G_3 zu derselben F^2, F^3 bezw. F^4 gehörend: $\overset{2}{\underset{2}{\Sigma}}_2$, $\overset{3}{\underset{2}{\Sigma}}_2$ bezw. $\overset{4}{\underset{2}{\Sigma}}_2$ aus G_2 und $\overset{2}{\underset{2}{\Sigma}}_3$, $\overset{3}{\underset{2}{\Sigma}}_3$, bezw. $\overset{4}{\underset{2}{\Sigma}}_3$ aus G_3. Aus $\overset{2}{\underset{2}{\Sigma}}_2$, $\overset{3}{\underset{2}{\Sigma}}_2$ bezw. $\overset{4}{\underset{2}{\Sigma}}_2$ haben ∞^1 Flächen die Eigenschaft, die 1 oder ε zu berühren bezw. Kegel zu sein, von denen 4, 9 bezw. 16 durch einen Punkt gehen, da $\mu^2 = 2$, 3 bezw. 4 also $\mu\nu = 4$, $\mu\rho = 9$ bezw. $\mu\chi = 16$ nach (10) ist.

Die Gerade 1 berühren also ∞^1 Flächen aus $\overset{2}{\underset{2}{\Sigma}}_2$, von denen 4 durch einen Punkt gehen; sie bilden mithin ein System 1. Stufe mit dem Index 4 von vorletzten Polarflächen des Punktes Q_2, gehören mithin zu den 1. Polarflächen der Punkte einer C^2 auf F^2 (57) und ihnen entsprechen dann die Flächen eines ebensolchen Systems mit dem Index 4 in $\overset{2}{\underset{2}{\Sigma}}_3$, aus dem nach (10) 8 Flächen die 1 berühren.

Die Flächen aus $\overset{3}{\underset{2}{\Sigma}}_2$, welche ε berühren bilden ein System 1. Stufe mit dem Index 9, dem ein ebensolches in $\overset{3}{\underset{2}{\Sigma}}_3$ entspricht, das zu derselben C^3 gehört; aus diesem berühren dann nach (19) 27 Flächen wieder die Ebene ε.

Die Flächen endlich aus $\overset{4}{\underset{2}{\Sigma}}_2$, welche Kegel sind, bilden ein System 1. Stufe mit dem Index 16, dem das zu derselben Kurve C^4 gehörige System mit gleichem Index in $\overset{4}{\underset{2}{\Sigma}}_3$ entspricht; in diesem ist $\mu = 16$ also nach (10) $\nu = 32$, $\rho = 48$ folglich $\chi = 2\rho - \nu = 64$. Ich habe also den Satz:

„Liegen 3 kollineare Gebüsche von vorletzten Polarflächen in Bezug auf die Flächen eines Gebüsches oder überhaupt von Flächen 2. Gr.[1]) vor, so geschieht es 8-, 27- bezw. 64-mal, dass entsprechende Flächen eine Gerade oder Ebene berühren bezw. gleichzeitig in Kegel ausarten."

Durch Q_1 Q_2 und Q_3 gehen also 8 Π'_1, 27 Π'_η und 64 H', folglich gilt der Satz:

„Die [reinen] Polarflächen einer Gerade oder Ebene bezw. die Hesse'schen Flächen in Bezug auf die 1. Polarflächen aller Punkte des Raumes für eine Grundfläche F^n bilden ein System 3. Stufe mit dem Index 8, 27 bezw. 64."

Ich könnte also die Anzahlen des in (65) beschriebenen Systems 5. Stufe berechnen, indem ich die Erzeugnisse von 5 eindeutig bezogenen Systemen 2. Stufe mit dem Index 1, 4 bezw. 9 — das wird eine Anzahl von Punkten im Raume sein — oder von 5 eindeutig bezogenen Systemen 3. Stufe mit dem Index 1, 8 bezw. 27 — das wird eine Kurve sein — bestimmte, doch will ich darauf nicht eingehen.

§ 6. Das System aller gemischten 2. Polarflächen.

(68) Das 6-stufige System aller gemischten 2. Polarflächen einer F^4, das ich erhalte, wenn ich alle im Raume möglichen Punktepaare herstelle, enthält alle ∞^3 reinen 2. Polarflächen, ∞^7 Büschel (44), ∞^6 Netze (45) und ∞^3 Gebüsche (46).

Für dieses 6-stufige System kann ich die Anzahl μ^6 berechnen. Denn soll die gemischte 2. Polarfläche von

[1]) Der Beweis für Flächen 2. Gr. ist im Nachtrag gegeben.

P_1 und P_2 durch 6 gegebene Punkte O_1, O_2..O_6 gehen, so müssen P_1 und P_2 in Bezug auf die reinen vorletzten Polarflächen von O_1, O_2.. O_6 konjugiert sein (38), d. h. P_2 muss gemeinsamer Punkt der Polarebenen von P_1 in Bezug auf jene Flächen, Π_{O_1}..Π_{O_6}, sein. Dann ist aber P_1 auch gemeinsamer Punkt der 6 Polarebenen von P_2. Wenn ich also festgestellt habe, wie oft es vorkommt, dass die Polarebenen eines Punktes in Bezug auf die 6 Flächen 2. Grades Π_{O_1}..Π_{O_6}, in einem Punkt zusammenlaufen, muss ich die erhaltene Anzahl halbieren, um die Zahl der Paare von Punkten zu bekommen, die in Bezug auf Π_{O_1},..Π_{O_6} gleichzeitig konjugiert sind.

Bilde ich nun die Polarebenen aller Punkte des Raumes in Bezug auf Π_{O_1},...Π_{O_6}, so erhalte ich 6 Ebenengebüsche oder Ebenenräume, die untereinander kollinear sind, indem sich die Polarebenen eines Punktes immer entsprechen.

Nun kommt es bei 6 kollinearen Gebüschen von Flächen n_1-ter,...n_6-ter Ordn. $s_{6,3} = (n_1\ n_2\ n_3 + n_1\ n_2\ n_4 + .. + n_4\ n_5\ n_6)$-mal vor, dass 6 entsprechende Flächen einen Punkt gemeinsam haben [1]), hier also, wo $n_1 = n_2 = .. = n_6 = 1$ ist, kommt es 20-mal vor. Es gibt also im Raume 20 Punkte P_1, deren 6 Polarebenen in Bezug auf Π_{O_1},..Π_{O_6} in einem Punkte P_2 zusammenlaufen, sodass es 10 Paare P_1, P_2 gibt, die in Bezug auf Π_{O_1},..Π_{O_6} gleichzeitig konjugiert sind.

„Liegen 6 Flächen 2. Grades vor, so gibt es im Raumes 10 Paare von Punkten die in Bezug auf alle 6 Flächen zugleich konjugiert sind.

Die Anzahl „μ^6 ist somit 10“; denn die gemischten 2. Polarflächen der 10 Paare P_1, P_2 gehen durch O_1,..O_6.

Ich hätte die Anzahl auch bestimmen können, indem ich den Satz (38) in der 2. Form anwandte. Auch da erhalte ich 6 kollineare Ebenenräume durch die Polarebenen von O_1,..O_6 in Bezug auf die 1. Polarflächen aller Punkte

---

[1]) Cremona „Grundzüge“ (142).

P_1 des Raumes. Die 20 Punkte P_2, in die 6 entsprechende Ebenen zusammenlaufen, sind auch hier zugleich Punkte P_1; denn geht die (n-2)-te Polarfläche oder Polarebene von $O_1, .. O_6$ in Bezug auf die 1. Polarfläche von P_1 durch P_2, so geht die (n-2)-te Polarfläche oder Polarebene von $O_1, .. O_6$ in Bezug auf die (n-(n-2)-1)-te oder 1. Polarfläche von P_2 durch P_1 [1]). So erhalte ich auch hier 10 Punktepaare P_1, P_2 mit der gesuchten Eigenschaft.

(69) Bei diesem 2. Verfahren zeigt sich die Möglichkeit, die übrigen Anzahlen zu berechnen, indem man anstelle der Systeme der Polarebenen von O nach und nach die Systeme 3. Stufe mit dem Index 8 bezw. 27 von Flächen Π'_1 bezw. Π'_{η} (67) setzt.

Doch diese Anzahlen kann ich ähnlich wie in (64) successive aus $\mu^6 = 10$ ableiten, da es sich durchweg um Flächen 2. Grades handelt. Es folgt aus $\mu^5\mu = 10$, dass $\mu^5\nu = 20$, $\mu^5\rho = 30$ u. s. w. ist, doch muss ich dabei berücksichtigen, dass in dem System ∞^3 Ebenenpaare enthalten sind, welche alle Ebenen des Raumes berühren. Infolge dessen werden die Bedingungen mit ρ^6 von allen ∞^3, mit ρ^5 von den ∞^2 Ebenenpaaren der 5-stufigen Systeme, welche μ und ν aussondern, mit ρ^4 von den ∞^1 Ebenenpaaren der 4-stufigen Systeme von μ^2, $\mu\nu$, ν^2 und mit ρ^3 von der endlichen Anzahl der Ebenenpaare in den 3-stufigen Systemen von μ^3, $\mu^2\nu$, $\mu\nu^2$, ν^3 erfüllt, sodass die Anzahlen nur zuverlässig sind, wenn höchstens ρ^2 in der Bedingung enthalten ist.

Auch die Anzahl $\nu^6 = 640$ ist nicht absolut zuverlässig; denn ν^6 wird von den im 6-stufigen System eventuell vorhandenen Doppelebenen erfüllt, da diese jede Gerade des Raumes in unserem Sinne berühren.

Ich kann dann folgende Tabelle für die in dieser Weise zu berechnenden Charakteristiken des 6-stufigen Systems von gemischten Polarflächen einer F^4 aufstellen:

---

[1]) Cremona, Grundzüge (84).

Bedingung	μ^3	$\mu^2\nu$	$\mu^2\rho$	$\mu\nu^2$	$\mu\nu\rho$	ν^3	$\mu\rho^2$	$\nu^2\rho$	$\nu\rho^2$
μ^3	10	20	30	40	60	80	90	120	180
$\mu^2\nu$	20	40	60	80	120	160	180	240	360
$\mu^2\rho$	30	60	90	120	180	240	—	360	—
$\mu\nu^2$	40	80	120	160	240	320	360	480	720
$\mu\nu\rho$	60	120	180	240	320	480	—	720	—
ν^3	80	160	240	320	480	—	720	960	1440
$\mu\rho^2$	90	180	—	360	—	720	—	—	—
$\nu^2\rho$	120	240	360	480	720	960	—	1440	—
$\nu\rho^2$	180	360	—	720	—	1440	—	—	—

Die 11 fehlenden Anzahlen:

$\mu^3\rho^3$, $\mu^2\nu\rho^3$, $\mu\nu^2\rho^3$, $\nu^3\rho^3$,
$\mu^2\rho^4$, $\mu\nu\rho^4$. $\nu^2\rho^4$,
$\mu\rho^5$, $\nu\rho^5$,
ρ^6 und ν^6 sind auf diese Weise nicht zu berechnen.

Allgemein gilt der Satz:

„Die gemischten 2. Polarflächen von je 2 Punkten des Raumes in Bezug auf dieselbe Grundfläche bilden ein System 6. Stufe mit dem Index 10 von Flächen (n-2)-ter Ordnung."

Denn der Satz (38), auf den sich die Untersuchung in (68) stützt, gilt für beliebige Grundfläche, mithin auch das Resultat von (68), während die übrigen Anzahlen nur für F^4 als Grundfläche richtig sind, da nur für sie die gemischten 2. Polarflächen Flächen 2. Grades sind.

Teil V.

Gemischte Polarflächen zweier Ebenen in Bezug auf F^4.

§ 1. Definition, Anzahl und Ordnung der gemischten Polarflächen von Ebenen.

(70) (a) Die gemischte 2. Polarfläche zweier Punkte kann ich nach (38) definieren als Ort der Punkte, in Bezug auf deren reine (n-2)-ten Polarflächen die beiden gegebenen

Punkte konjugiert sind. Analog definiert Cremona die gemischte Polarfläche zweier Ebenen als Ort der Punkte, für deren reine vorletzte Polarflächen die beiden Ebenen konjugiert sind[1]). In beiden Fällen erhalte ich die reine Polarfläche, wenn sich die beiden gegebenen Punkte bezw. Ebenen vereinigen. Das System der gemischten Polarflächen von je 2 Ebenen wird also die reinen Polarflächen der Ebenen des Raumes enthalten.

(b) Es gibt nun im Raume ∞^3 reine vorletzte Polarflächen einer Grundfläche, und für eine solche vorletzte Polarfläche, die ja 2. Grades ist, ist es eine einfache Bedingung, dass 2 Ebenen in Bezug auf sie konjugiert sein sollen. Mithin gibt es ∞^2 reine vorletzte Polarflächen, für welche zwei gegebene Ebenen konjugiert sind, und der Ort der ∞^2 Pole muss mithin eine Fläche, die gemischte Polarfläche der beiden Ebenen, sein. Nun kann ich die ∞^3 Ebenen des Raumes auf ∞^6 Arten zu Paaren zusammenstellen, mithin muss das System aller gemischten Polarflächen von je 2 Ebenen ein 6-stufiges System sein.

(c) Die Ordnung der gemischten Polarfläche zweier Ebenen ε_1, ε_2 als Ort der Punkte, für deren vorletzte Polarflächen ε_1 und ε_2 konjugiert sind, ist bereits in der Einleitung berechnet worden. Denn die gemischte Polarfläche $\Pi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ ist ja nichts anderes als die in (2) beschriebene Fläche $\psi_{21} \equiv \psi_{12}$, wenn ich die Punkte 3,4 auf $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, 1 in ε_1 und 2 in ε_2 lege. Diese Fläche aber hat, wie dort gezeigt, die Ordnung 3(n-2), folglich gilt der Satz:

„Die gemischte Polarfläche zweier Ebenen ε_1 und ε_2 für eine Grundfläche n-ter Ordnung ist eine Fläche von der Ordnung 3 (n-2), für F^4 also von der Ordnung 6."

(71) Die Flächen $\Pi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ bilden also ein 6-stufiges System von Flächen 3 (n-2)-ter Ordnung; aus diesem müssen

---

[1]) Cremona, „Mémoire" (47).

∞^5 Flächen durch einen gegebenen Punkt O gehen und nach der Definition der $\Pi_{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}$ lässt sich die Bedingung sofort aussprechen, welche ε_1 und ε_2 erfüllen müssen, damit $\Pi_{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}$ durch O geht:

„Soll die gemischte Polarfläche zweier Ebenen in Bezug auf F^n durch einen Punkt O gehen, so müssen die beiden Ebenen in Bezug auf die (n-2)-te Polarfläche von O konjugiert sein."

Nun gibt es in Bezug auf die (n-2)-te Polarfläche von O tatsächlich ∞^5 Paare konjugierter Ebenen, also gehen durch O ∞^5 gemischte Polarflächen zweier Ebenen.

Ebenso müssen eine Gerade l bezw. eine Ebene γ ∞^5 Flächen aus dem System 6. Stufe der $\Pi_{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}$ ausscheiden. die sie berühren; es lässt sich aber für die Ebenenpaare, deren gemischte Polarflächen ν bezw. ρ erfüllen, keine so einfache Bedingung finden, wie etwa die in (39) und (40), da ich die gemischte Polarfläche zweier Ebenen nicht als Polarfläche der einen Ebene in Bezug auf die [reine] Polarfläche der anderen auffassen kann, wie ich die gemischte 2. Polarfläche zweier Punkte doch als 1. Polarfläche des einen in Bezug auf die 1. des anderen betrachten konnte.

§ 2. Systeme von gemischten Polarflächen einer festen und einer variablen Ebene.

(72) Ich halte die Ebene ε_1 fest und lasse die Ebene ε_2 einen Ebenenbüschel mit der Axe g durchlaufen. Ich erhalte dabei ein System 1. Stufe von Flächen $\Pi_{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}$, dessen Index μ ich bestimmen will.

Soll eine Fläche $\Pi_{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}$ durch einen gegebenen Punkt O gehen, so müssen ja nach (71) ε_1 und ε_2 in Bezug auf die (n-2)-te Polarfläche Π_O von O konjugiert sein. Zu ε_1 gibt es in Bezug auf Π_O ∞^2 konjugierte Ebenen die sämtlich dem Bündel angehören, dessen Scheitel der Pol E von ε_1 für Π_O ist. Nach diesem Bündel kommt eine Ebene des Büschels g, mithin ist „$\mu = 1$", und es gilt der Satz:

„Die gemischten Polarflächen einer festen Ebene und der Ebenen eines Büschels bilden einen Büschel von Flächen 3 (n-2)-ter oder bei F^4 6-ter Ordnung."

Die beiden weiteren Anzahlen sind dann

„$\nu = 2\ [3\ (n-2)-1] = 2.5 = 10$" und

„$\rho = 3\ [3\ (n-2)-1]^2 = 3.25 = 75$" [1]).

Dieser Büschel hat eine Grundkurve von der Ordnung $9\ (n-2)^2 = 36$, deren Punkte O' die Eigenschaft haben, dass in Bezug auf ihre reinen (n-2)-ten Polarflächen alle Ebenen ε_2 durch g zu ε_1 konjugiert sind; denn in diesem Falle gehen alle $\Pi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ durch O'. Diese Kurve zerfällt aber in 2 Teile; denn alle Flächen des Büschels haben die Kurve $6\ (n-2)^2$-ter Ordnung gemeinsam, in der die [reine] Polarfläche von ε_1 die Hesse'sche Fläche berührt; diese liegt nämlich auf der gemischten Polarfläche von ε_1 und jeder anderen Ebene [2]); sie enthält ja auch die Punkte, deren (n-2)-te Polarflächen Kegel 2. Grades sind — weil sie auf der Hesse'schen Fläche liegt — und die Ebene ε_1 berühren, d. h. ihren Doppelpunkt in ε_1 haben — weil sie auf der [reinen] Polarfläche von ε_1 liegt. — Zu einer Ebene ε_1 durch den Doppelpunkt des Kegels 2. Gr. sind aber alle Ebenen des Raumes konjugiert in Bezug auf den Kegel, da ε_1 ∞^1 Pole in gerader Linie hat, jede Ebene also durch einen Pol von ε_1 geht. Es bleibt also nur eine Kurve von der Ordnung $3\ (n-2)^2$ übrig, die von dem jeweiligen Ebenenbüschel abhängig ist; in Bezug auf die (n-2)-te Polarfläche eines Punktes O' auf ihr sind alle Ebenen ε_2 durch g zu ε_1 konjugiert, also muss der Pol von ε_1 in Bezug auf $\Pi_{O'}$ auf die g fallen:

„Zu einer Ebene gibt es eine Kurve von der Ordnung $3\ (n-2)^2$ bezw. 12, deren Punkte die Eigenschaft haben, dass die Pole der Ebene in Bezug auf ihre vorletzteu Polarflächen für eine F^n bezw. F^4 eine gegebene Punktreihe g durchlaufen."

---

[1]) Cremona, „Grundzüge" (41).

[2]) Cremona, „Mémoire" (47).

Aehnlich ist die zu einem Punkte gehörige Kurve $(n-2)^2$-ter Ordnung in (44) definiert.

(73) Jetzt lasse ich ε_2 einen Ebenenbündel P durchlaufen und erhalte ein System 2. Stufe von Flächen $\Pi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$, dessen Index μ^2 zu berechnen ist.

Es sind 2 Punkte O_1 und O_2 gegeben; die zu ε_1 in Bezug auf Π_{O_1} und Π_{O_2} konjugierten Ebenen bilden 2 Bündel E_1 und E_2, deren Scheitel die Pole von ε_1 in Bezug auf Π_{O_1} und Π_{O_2} sind; die beiden Bündel haben mit dem Bündel P eine Ebene ε_2 gemeinsam, mithin ist „$\mu^2 = 1$“.

„Die gemischten Polarflächen einer Ebene ε_1 und der Ebenen eines Bündels bilden ein Netz von Flächen 3 (n-2)-ter, oder bei F^4 6-ter Ordnung.“

Die Charakteristiken kann ich bis auf ρ^2 nach (23) berechnen:

$$\text{„}\mu^2 = 1,\ \mu\nu = 10,\ \mu\rho = 75$$
$$\nu^2 = 100,\ \nu\rho = 750\text{“}.$$

Die Grundpunkte dieses Netzes haben die Eigenschaft, dass in Bezug auf ihre (n-2)-ten Polarflächen alle Ebenen ε_2 durch P zu ε_1 konjungiert sind.

Das ist, wie in (72) gezeigt, der Fall für die Punkte der Kurve, in der die [reine] Polarfläche von ε_1 die Hesse'sche Fläche berührt, sodann aber für die $(n-2)^3$ Punkte, für deren vorletzte Polarflächen nach (19) die Ebene ε_1 und der Pol P polare Elemente sind.

Es liegt also ein spezielles Netz vor mit einer Grundkurve von der Ordnung 6 $(n-2)^2$ und $(n-2)^3$ Grundpunkten, was aequivalent den $[3\,(n-2)]^3$ Grundpunkten eines allgemeinen Netzes von Flächen 3 (n-2)-ter Ordnung sein muss.

(74) Lasse ich jetzt die Ebene ε_2 den ganzen Ebenenraum durchlaufen, so erhalte ich ein System 3. Stufe von Flächen $\Pi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$. Die zu ε_1 in Bezug auf die (n-2)-ten Polarflächen von O_1, O_2 und O_3 konjugierten Ebenen bilden 3 Bündel, die eine Ebene ε_2 gemeinsam haben; diese ist zu ε_1 in Bezug auf alle drei (n-2)-te Polarflächen konjugiert.

Durch die 3 Punkte O_1, O_2 und O_3 geht also nur die gemischte Polarfläche von ε_1 und dieser einen Ebene ε_2, so dass „$\mu^3 = 1$“ ist.

„Die gemischten Polarflächen einer festen Ebene und aller Ebenen des Raumes in Bezug auf F^n bilden ein Gebüsch von Flächen 3 (n-2)-ter Ordnung, bei F^4 also 6-ter Ordnung.“

Auch dieses Gebüsch ist ein spezielles System, da alle Flächen $\Pi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ mit festem ε_1 und auch Π_{ε_1} selbst, die dem Gebüsch angehört, die Kurve von der Ordnung $6\,(n\text{-}2)^2$ gemeinsam haben, in der Π_{ε_1} die Hesse'sche Fläche berührt (72).

§ 3. Das System aller gemischten Polarflächen von Ebenen.

(75) Das System ist nach (70) ein System 6. Stufe und enthält das System 3. Stufe mit dem Index 8 von reinen Polarflächen der Ebenen des Raumes, ferner ∞^7 Büschel (72), ∞^6 Netze (73) und ∞^3 Gebüsche (74), die ich erhalte, wenn ich jede Ebene des Raumes mit den ∞^4 Ebenenbüscheln, ∞^3 Ebenenbündeln bezw. dem Ebenenraum zusammenstelle.

Von den Anzahlen des 6-stufigen Systems kann ich μ^6 berechnen. Soll $\Pi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ durch die Punkte $O_1, .. O_6$ gehen, so müssen ε_1 und ε_2 in Bezug auf $\Pi_{O_1}, .. \Pi_{O_6}$ konjugiert sein, d. h. die Pole von ε_1 in Bezug auf $\Pi_{O_1}, .. \Pi_{O_6}$ müssen sämtlich in ε_2 liegen; tritt das ein, so fallen auch die 6 Pole von ε_2 in die Ebene ε_1. Wenn ich also die Anzahl der Ebenen festgestellt habe, deren Pole in Bezug auf 6 Flächen 2. Gr. in einer Ebene liegen, muss ich die Zahl halbieren, um die gesuchte Charakteristik zu bekommen.

Die Frage ist vollkommen dual zu der in (68) behandelten, und ich kann den dort erhaltenen Satz über konjugierte Punkte einfach dualisieren.

„Liegen 6 Flächen 2. Grades vor, so gibt es im Raume 10 Paare von Ebenen, die in Bezug auf alle 6 Flächen gleichzeitig konjugiert sind.“

Daraus folgt, dass „$\mu^6 = 10$“ ist.

„Die gemischten Polarflächen von je 2 Ebenen des Raumes bilden ein System 6. Stufe mit dem Index 10 von Flächen 3 (n-2)-ter Ordnung bei F^n als Grundfläche.“

Auch hier kann ich aus $\mu^6 = 10$ einige andere Charakteristiken ableiten mit Hilfe von (23), doch nur solche, in denen nicht ρ enthalten ist, da es sich hier nicht wie dort um Flächen 2. Grades handelt; so ist $\mu^5\nu = 2.10.[3\,(n\text{-}2) - 1] = 100$ u. s. w.

Teil VI.

Gemischte Polarflächen von zwei Geraden in Bezug auf F^4.

§ 1. Definition, Anzahl und Ordnung der gemischten Polarflächen zweier Geraden.

(76) Cremona definiert die gemischte Polarfläche zweier Geraden als Ort der Punkte, für deren vorletzte Polarfläche die „droite réciproque“ der einen Gerade die andere trifft[1]). Er fasst dabei als Reciproke einer Gerade g in Bezug auf eine Fläche 2. Gr. die Axe g′ des Ebenenbüschels auf, welchen die Polarebenen der Punkte von g bilden. Diese Gerade wird jetzt allgemein als Polare von g in Bezug auf F^2 bezeichnet, und alle Geraden, welche diese Polare treffen, nennt man konjugiert zu g; auch dieses Konjugiertsein ist reciprok, so dass ich die Definition folgendermassen aussprechen kann:

„Die gemischte Polarfläche zweier Geraden g_1 und g_2 ist der Ort der Punkte, für deren (n-2)-te Polarfläche in Bezug auf F^n die Geraden g_1 und g_2 konjugiert sind.“

Die Bedingung, dass 2 gegebene Geraden in Bezug auf eine F^2 konjugiert sind, ist eine einfache Bedingung für F^2,

---

[1]) Cremona „Mémoire“ (48).

sodass es unter den ∞^3 (n-2)-ten Polarflächen der Grundfläche F^n ∞^2 geben wird, für die g_1 und g_2 konjugiert sind. Die Pole dieser ∞^2 vorletzten reinen Polarflächen erfüllen also eine Fläche, und zu jedem Gradenpaare gibt es eine derartige Fläche; ich erhalte also im ganzen ∞^8 gemischte Polarflächen von Geraden, da es im Raume ∞^8 Geradenpaare gibt.

(77) Es muss jetzt noch die Ordnung der gemischten Polarfläche von g_1 und g_2 festgestellt werden:

Ich lege auf g_1 2 Punkte 1, 2 fest; P_1 und P_2 seien ihre 1. Polarflächen in Bezug auf die Grundfläche F^n; dann bilden die 1. Polarflächen aller Punkte r von g_2 in Bezug auf P_1 und P_2 zwei projektive Büschel von Flächen (n-2)-ter Ordnung, P_{1r} bezw. P_{2r}, mit solchen Flächen als entsprechenden, die zu demselben Punkte r auf g_2 gehören. Die beiden Büschel erzeugen eine Fläche von der Ordn. 2 (n-2), welche die gemischte Polarfläche von g_1 und g_2 ist.

Zunächst entsteht immer dieselbe Fläche gleichgültig, welche Punkte von g_1 ich als 1 und 2 nehme; denn die 1. Polarflächen von r in Bezug auf alle Flächen $P_1, P_2 .. P_s$ bilden für festes r einen Büschel, dessen Grundkurve der erzeugten Fläche angehört und sich nicht ändert, wenn ich 1 oder 2 auf g_1 verschiebe.

Die hier erzeugte Fläche 2 (n-2)-ter Ordn. $\Pi_{g_1 g_2}$ ist in genau derselben Weise hergestellt worden wie Φ_{12} in (1) nur, dass die Gerade auf der hier r läuft mit der anderen keinen Punkt gemeinsam hat. Das ändert aber nichts an der Eigenschaft von Φ_{12}, so dass ich schliessen kann:

$\Pi_{g_1 g_2}$ ist so, wie dort Φ_{12}, der Ort der Punkte, für deren reine vorletzte Polarflächen g_1 und g_2 konjugiert sind, also die in (76) definierte Fläche.

„Die gemischte Polarfläche zweier Geraden ist bei einer F^n als Grundfläche eine Fläche von der Ordn. 2 (n-2).“

(78) Nach der Definition kann ich sofort für die Flächen $\Pi_{g_1 g_2}$, welche die Bedingung μ erfüllen, den Satz aufstellen:

„Soll die gemischte Polarfläche zweier Geraden g_1 und g_2 durch einen Punkt O gehen, so müssen g_1 und g_2 in Bezug auf die (n-2)-te Polarfläche von O konjugiert sein.“

In Bezug auf eine Fläche 2. Grades gibt es aber ∞^7 Paare konjugierter Geraden, da es zu jeder Gerade ∞^8 konjugierte gibt, die Geraden, welche der Polaren jener begegnen. Mithin gehen durch O ∞^7 Flächen $\Pi_{g_1 g_2}$.

Die Bedingungen ν und ρ sind nicht so einfach zu formulieren.

§ 2. Systeme aus gemischten Polarflächen einer festen und einer variablen Gerade.

(84) Ich halte g_1 fest und lasse g_2 einen Strahlenbüschel (P, π) durchlaufen; dann erhalte ich ein System 1. Stufe von Flächen $\Pi_{g_1 g_2}$.

Soll nun eine Fläche dieses Systems durch O gehen, so muss g_2 in Bezug auf Π_O konjugiert zu g_1 sein; die ∞^3 konjugierten Geraden zu g_1 bilden ein Strahlengebüsch, dessen Axe die Polare g_1' von g_1 ist, und dieses Gebüsch hat mit dem Strahlenbüschel (P, π) einen Strahl gemein, also ist „$\mu = 1$“.

„Die gemischten Polarflächen einer festen Gerade und der Geraden eines Strahlenbüschels, bilden einen Büschel von Flächen 4. Ordnung bei F^4 als Grundfläche und 2 (n-2)-ter Ordnung bei F^n als Grundfläche.“

Dieser Büschel hat eine Grundkurve von der Ordnung $4\,(n-2)^2$ bezw. 16, deren Punkte O′ die Eigenschaft haben, dass für ihre vorletzte Polarfläche die Polare von g_1 durch P geht oder in π fällt; denn dadurch werden alle g_2 aus (P, π) zu g_1 konjugiert. Auf dieser Kurve müssen die $4\,(n-2)^3$ Pole der Polarkegel 2. Grades liegen, deren Doppelpunkte die Schnittpunkte von g_1 mit der Steiner'schen Fläche sind. Denn bilde ich für die Punkte einer Gerade g durch den Doppelpunkt eines Kegel 2. Gr. die Polarebenen, so durchlaufen diese nicht einen

Ebenenbüschel, sondern alle Punkte von g haben ein und dieselbe Polarebene γ in Bezug auf den Kegel bis auf den Doppelpunkt selbst, dessen Polarebene unbestimmt ist, so dass ich jede Gerade des Raumes als konjugierte von g auffassen kann, da alle Geraden von γ Polaren der g sind. Für diese 4 $(n-2)^3$ Kegel 2. Gr. also sind alle Geraden des Raumes zu g_1 konjugiert, ihre 4 $(n-2)^3$ Pole sind allen Flächen $\Pi_{g_1\, g_1}$ mit festem g_1 gemeinsam.

(85) Lasse ich jetzt g_2 einen Bündel P oder ein Strahlenfeld π durchlaufen, so erhalte ich beidemal ein System 2. Stufe von Flächen $\Pi_{g_1\, g_1}$.

Soll eine Fläche aus dem einen oder anderen Systeme durch O_1 und O_2 gehen, so muss die Gerade g_2 durch P oder in π die Polaren von g_1 in Bezug auf Π_{O_1} und Π_{O_1} treffen. Es gibt aber nur eine Gerade, welche 2 Geraden trifft und mit einem P bezw. einer Ebene π incidiert, also ist beidemal „$\mu^2 = 1$“. Ich habe mithin den Satz:

„Die gemischten Polarflächen einer festen Gerade und der Geraden eines Bündels bezw. Feldes bilden ein Netz von Flächen 2 $(n-2)$-ter oder bei F^4 4. Ordnung.“

Beide Netze, die ich mit N_P und N_π bezeichne, sind spezielle Netze mit Grundkurven; doch ist bei ihnen die Ordnung der Grundkurven verschieden.

(a) Die Grundpunkte O′ von N_P müssen Pole von vorletzten Polarflächen sein, für welche die Polarebenen aller Punkte von g_1 durch P gehen; dann müssen die 1. Polarflächen der Punkte von g_1 in Bezug auf die $(n-(n-2)-1)$-te oder 1. Polarfläche von P durch alle O′ gehen [1]). Diese Flächen aber bilden nach (44) einen Büschel mit der Grundkurve $(n-2)^2$-ter Ordnung.

„Mithin erfüllen die O′ eine Kurve von der Ordnung $(n-2)^2$-bezw. 4.“

---

[1]) Cremona, „Grundzüge“ (84).

Ausserdem sind aber die $4(n-2)^3$ Pole jener Polarkegel mit dem Doppelpunkt auf g_1 auch Grundpunkte des Netzes, und zwar liegen sie ausserhalb jener Kurve; denn die Polaren von g_1 in Bezug auf jene Kegel liegen in dem jeweiligen Polarebenen γ_1 (79), und diese gehen nicht durch P. Diese $4(n-2)^3$ Pole sind übrigens die Punkte, in denen die reine Polarfläche von g_1 die reinen Polarflächen aller Ebenen durch g_1 berührt[1]); denn die Polarkegel berühren ja alle Ebenen durch g_1, ihre Pole müssen also auf allen reinen Polarflächen der Ebenen durch g_1 liegen.

„Die Flächen des Netzes N_P haben die Polarkurve von g_1 in Bezug auf die 1. Polarfläche von P und die $4(n-2)^3$ Punkte gemein, in denen die [reine] Polarfläche von g_1 die reinen Polarflächen sämtlicher Ebenen durch g_1 berührt."

(b) Soll O'' ein Grundpunkt von N_π sein, so muss die Polare von g_1 in Bezug auf $\Pi_{O''}$ alle Strahlen des Feldes π treffen, also in π liegen; π muss mithin Polarebene eines Punktes von g_1 in Bezug auf $\Pi_{O''}$ sein, oder der Pol von π muss auf g_1 liegen. Nach (72) erfüllen aber die Punkte eine Kurve $3(n-2)^2$-ter Ordnung, für deren vorletzte reine Polarflächen die Pole einer Ebene π eine Gerade g_1 durchlaufen; das Netz N_π hat also eine Grundkurve von der Ordnung $3(n-2)^2$; auf ihr aber liegen bereits die $4(n-2)^3$ Pole der Kegel mit Doppelpunkt auf g_1; denn der Pol der Ebene π in Bezug auf einen solchen Kegel ist ja der Doppelpunkt des Kegels und liegt daher auf g_1.

„Die Flächen des Netzes N_π haben eine Grundkurve von der Ordnung $3(n-2)^2$ gemeinsam, welche durch die $4(n-2)^3$ Pole der Polarkegel 2. Grades geht, deren Doppelpunkte auf g_1 liegen."

Die beiden hier erhaltenen Kurven von der Ordnung $(n-2)^2$ und $3(n-2)^2$ geben zusammen, wenn P und π incidieren, die in (79) gefundene Kurve von der Ordnung

[1]) Cremona, „Mémoire" (51).

$4\,(n-2)^2$, deren Punkte die Eigenschaft haben, dass für ihre vorletzten Polarflächen die Polaren von g_1 sämtliche Strahlen des Büschels (P, π) treffen.

(c) Die Ordnung der beiden in (a) (b) gefundenen Raumkurven kann ich noch auf folgende Weise berechnen:

Die Ordnung der 1. Kurve ist die Zahl der Punkte O′ in einer Ebene ε, für deren vorletzte Polarflächen die Polarebenen aller Punkte von g durch P gehen. Die vorletzten Polarflächen der Punkte von ε bilden ein System 2. Stufe mit dem Index 4 bei einer F^4 als Grundfläche (13). Schneide ich nun dieses System mit der Ebene (P g), so erhalte ich ein Kegelschnittsystem mit dem Index 4 und die ausgezeichneten Polarflächen der Punkte O′ geben Kegelschnitte, für welche P und g Pol und Polare sind, weil die Polaren aller Punkte von g durch P gehen müssen. Um die Anzahl dieser Kegelschnitte zu bestimmen, lege ich auf g 2 beliebige Punkte L und L′ und verbinde sie mit P durch l und l′. Ein Punkt X auf l scheidet ein System 1. Stufe mit dem Index 4 der durch ihn gehenden Kegelschnitte aus, und dieses ruft auf l′ eine involutorische Korrespondenz [4] hervor [ähnlich wie in (10)], in der es 4 Paare entsprechender Punkte gibt, die zu P und L′ harmonisch liegen, so dass P und L′ für die zugehörigen 4 Kegelschnitte konjugiert sind. Diese 4 Kegelschnitte gehen durch X und schneiden l in 4 zweiten Punkten X′, so dass auf l auch eine involutorische Korrespondenz [4] entsteht. Zu den 4 Paaren entsprechender Punkte dieser Korrespondenz, welche zu P und L harmonisch liegen, gehören 4 Kegelschnitte für die P und L und nach der Art der Zuordnung auch P und L′ konjugiert sind. Mithin gibt es in dem 2-stufigen System 4 Kegelschnitte, für welche P zu L und L′ konjugiert, also P Pol von $LL' = g$ ist. In der Ebene ε gibt es mithin 4 Punkte O′, die Kurve ist von der Ordnung 4.

Im 2. Falle ist das Verfahren dual; aus dem System der vorletzten Polarflächen der Punkte von ε mit dem Index

4 berühren nach (13) 36 Flächen zwei gegebene Ebene. Wenn ich also das System dieser Flächen aus dem Punkte (g, π) projiziere, indem ich die Berührungskegel herstelle, erhalte ich ein Kegelsystem 2. Stufe, aus dem 36 Kegel zwei Ebenen berühren. Ich lege dann durch g 2 Ebenen λ und λ', welche π in l und l′ schneiden, stelle in den Ebenenbüscheln um l′ und l in dualer Weise die involutorischen Korrespondenzen [36] her und finde so, dass es in dem Kegelsystem 36 Kegel gibt für die g und π polare Elemente sind, also in ε 36 Punkte, für deren zweite Polarflächen die Pole aller Ebenen durch g in π liegen. Denn wenn die Polarstrahlen der Ebenen durch g in Bezug auf den tangierenden Kegel in die zu g polare Ebene π fallen, müssen in ihr auch die Pole in Bezug auf die F^2 liegen, welche der Kegel tangiert. 24 dieser Punkte haben aber als vorletzte Polarflächen Kegel, welche π berühren, da nach (14) $\chi\rho = 2 \cdot 24$ ist, und die Pole aller Ebenen für diese Kegel sind deren Doppelpunkte in π gelegen. Ich muss also 24 abziehen. In der Ebene ε gibt es mithin 12 Punkte O″, die Kurve der O″ hat also die Ordnung 12.

(81) Lasse ich jetzt g_2 ein Strahlengebüsch mit der Axe l durchlaufen, so erhalte ich ein System 3. Stufe von Flächen $\Pi_{g_1 g_2}$. Die Polaren von g_1 in Bezug auf die (n-2)-ten Polarflächen Π_{O_1}, Π_{O_2}, Π_{O_3} der 3 Punkte O_1, O_2, O_3 haben dann mit der Axe l 2 gemeinsame Treffgeraden, mithin gibt es 2 Geraden g_2, welche zu g_1 in Bezug auf Π_{O_1}, Π_{O_2}, und Π_{O_3} konjugiert sind; folglich gehen durch O_1, O_2, O_3 2 Flächen $\Pi_{g_1 g_2}$ aus diesem System 3. Stufe, so dass „$\mu^3 = 2$“ ist.

„Die gemischten Polarflächen einer festen Gerade und der Geraden eines Strahlengebüsches in Bezug auf eine Grundfläche n-ter Ordnung bilden ein System 3. Stufe mit dem Index 2 von Flächen 2 (n-2)-ter oder bei F^4 4. Ordnung.

Alle diese Flächen haben wieder die $4(n-2)^3$ Punkte gemeinsam, deren (n-2)-te Polarflächen Kegel 2. Gr. mit dem Doppelpunkt auf g_1 sind. Andere Grundpunkte aber,

die dadurch zustande kommen könnten, dass 1 selbst Polare von g_1 für eine Fläche Π_0 wird, gibt es nicht, da es für eine Fläche 2 Gr. eine 4-fache Bedingung ist, dass 2 Geraden für sie polare Elemente sind, ich hier aber nur ∞^3 Flächen Π_O habe, denen ich keine 4-fache Bedingung auferlegen kann.

Aus $\mu^3 = 2$ kann ich mit Hülfe des Satzes (23) wieder einige andere Anzahlen berechnen:

„$\mu^2\nu = 2.\ 2.3 = 12.$
$\mu\nu^2 = 2.12.3 = 72.$
$\nu^3 = 2.72.3 = 432.$“

(82) Lasse ich jetzt g_2 den ganzen Strahlenraum durchlaufen, so ergibt sich ein System 4. Stufe von Flächen $\Pi_{g_1 g_2}$, welches auch die reine Polarfläche von g_1 enthält.

Durch 4 Punkte $O_1,..O_4$ gehen soviele Flächen des Systems, als die 4 Polaren von g_1 in Bezug auf $\Pi_{O_1},..\Pi_{O_4}$ gemeinsame Treffgeraden haben, also 2.

Folglich habe ich den Satz:

„Die gemischten Polarflächen einer festen Gerade und aller Geraden des Raumes in Bezug auf F^4 bilden ein System 4. Stufe mit dem Index 2 von Flächen 2 (n-2)-ter oder bei F^4 4. Ordnung.

Diesen Flächen sind wieder die $4(n-2)^3$ Pole der Polarkegel mit Doppelpunkt auf g_1 gemeinsam, auch der in dem System enthaltenen [reinen] Polarfläche von g_1, da ja, wie in (80a) erwähnt wurde, diese Punkte Berührungspunkte jener Fläche mit den Polarflächen der durch g_1 gehenden Ebenen sind.

§ 3. Das System aller gemischten Polarflächen von Geraden.

(83) Das System aller Flächen $\Pi_{g_1 g_2}$ ist nach (76) von der 8. Stufe; es enthält das System 4. Stufe mit dem Index 32 der reinen Polarflächen aller Geraden des Raumes, ferner ∞^9 Büschel (79), ∞^7 Netze N_P, ∞^7

Netze N_π (80), ∞^8 Systeme $\overset{2}{\underset{3}{\Sigma}}$ (81) und ∞^4 Systeme $\overset{2}{\underset{4}{\Sigma}}$ die ich erhalte, wenn ich jede Gerade des Raumes mit den ∞^5 Strahlenbüscheln, den ∞^3 Strahlenbündeln bezw. -feldern den ∞^4 Strahlengebüschen und endlich dem Strahlenraum zusammenstelle.

(84) Für dieses 8-stufige System kann ich nun die Charakteristik μ^8 berechnen.

Soll eine Fläche $\Pi_{g_1 g_2}$ durch die 8 Punkte $O_1, \ldots O_8$ gehen, so muss g_2 die 8 Polaren von g_1 in Bezug auf die (n-2)-ten Polarflächen $\Pi_{O_1}, \ldots \Pi_{O_8}$ treffen. Tritt das ein, so muss auch umgekehrt g_1 den 8 Polaren von g_2 begegnen, da das Konjugiertsein ja reciprok ist.

Bilde ich nun die Polaren aller Geraden des Raumes in Bezug auf eine Fläche 2. Grades, so erfüllen diese wieder den Strahlenraum; wenn ich also die Polaren g' aller Geraden g des Raumes in Bezug auf $\Pi_{O_1}, \Pi_{O_2}, \ldots \Pi_{O_8}$ herstelle, so erhalte ich 8 kollineare Strahlenräume mit solchen Strahlen g' als entsprechenden, die Polaren derselben Gerade g sind. Ich habe also zu untersuchen, wie oft es vorkommt, dass 8 entsprechende Strahlen g'_1 eine gemeinsame Treffgerade g_2 haben, muss dann aber diese Anzahl halbieren, weil die 8 Polaren von g_2 dann die g_1 als Treffgerade haben, jede g_1 also auch eine g_2 ist.

Nun hat Herr Geheimrat Prof. Dr. Sturm die Anzahl der Geraden, welche entsprechende Geraden aus 8 kollinearen Räumen treffen, auf Grund des Korrespondenzprinzips im Strahlenraume[1]) festgestellt und mir gütigst mitgeteilt; sie ist 280.

Folglich gibt es 140 Paare von Geraden die in Bezug auf $\Pi_{O_1}, \ldots \Pi_{O_8}$ gleichgzeitig konjugiert sind, und die gesuchte Charakteristik „μ^8 ist mithin 140".

„Liegen 8 Flächen 2. Grades vor, so gibt es 140 Paare von Geraden im Raume, die in Bezug auf alle 8 Flächen konjugiert sind."

---

[1]) Sturm, Liniengeometrie I, Nr. 37.

(85) Aus $\mu^8 = 140$ kann ich dann wieder nach (23) weitere Anzahlen berechnen; doch steigen sie hier sehr schnell; so ist $\mu^7\nu = 2.140\ [2(n-2)-1] = 840$, $\mu^6\nu^2 = 2.840\ [2(n-2)-1] = 3440$ u. s. w.

„Die gemischten Polarflächen von je 2 Geraden des Raumes in Bezug auf F^4 bilden ein System 8. Stufe mit dem Index 140 von Flächen 2(n-2)-ter oder bei F^4 4. Ordnung."

Nachtrag.

Zu (67). Es liegen 3 kollineare Gebüsche von Flächen 2. Grades vor; es soll untersucht werden, wie oft es geschieht, dass entsprechende Flächen eine Gerade oder je eine von 3 gegebenen Geraden berühren.

Jedes der 3 Gebüsche enthält ∞^4 Büschel, und in jedem dieser Büschel gibt es zwei Flächen, welche eine geg. Gerade berühren. Bilde ich nun die 3 Gebüsche kollinear in den Punktraum ab, so dass 3 entsprechende Flächen in einen Punkt, entsprechende Büschel also in eine Gerade abgebildet werden, so gibt es auf jeder Gerade des Raumes 2 Punkte, denen Flächen des 1. Gebüsches entsprechen, welche die eine der geg. Geraden berühren, und ebenso zu den beiden anderen Gebüschen je 2 Punkte. Ich erhalte also 3 Flächen 2. Ordnung, deren 8 gemeinsame Punkte Bilder von je 3 entsprechenden Flächen sind — nach der Art der Abbildung — und andererseits auch entsprechende Flächen in den Gebüschen haben, welche die gestellte Bedingung erfüllen. Die gesuchte Anzahl ist also 8.

Ganz ähnlich ist der Beweis in den beiden anderen Fällen, nur dass dann in jedem Büschel 3 bezw. 4 Flächen liegen, ich also 3 Flächen 3. bezw. 4. Ordnung erhalte, die dann $3^3 = 27$ bezw. $4^3 = 64$ Punkte gemein haben.

Lebenslauf

Ich, Reinhold Schmidt, evang., wurde geboren am 20. 5. 1885 als Sohn des verstorbenen Tabakfabrikanten Georg Schmidt und seiner Frau Anna, geb. Oesterreich. Ich besuchte das städtische Gymnasium meiner Vaterstadt Ohlau und bestand Ostern 1903 die Reifeprüfung.

Darauf begann ich die praktische Vorbereitung für das höhere Bergfach in der Königin-Luise-Grube zu Zabrze, musste aber aus Gesundheitsrücksichten im Herbst 1903 meine Entlassung nehmen.

Seitdem widmete ich mich dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften und zwar zunächst je ein Semester an den Universitäten Breslau, Strassburg und Berlin, bis ich S. S. 1905 nach Breslau zurückkehrte, wo ich sodann bis Ostern 1908 immatrikuliert war.

Meinen verehrten Lehrern, den Herren:

Baumgartner, Herz, Hintze, Kneser, Kühnemann, Ladenburg, Landsberg, Lummer, O. E. Meyer, Pringsheim, Rosanes, Sachs, Schäfer, Sturm an der Breslauer, den Herren:

Braun, Disteli, Reihe, Weber, an der Strassburger und den Herren

Frobenius, Gabriel, van't Hoff, Knoblauch, Kriegar-Menzel an der Berliner Universität weiss ich aufrichtigen Dank.

Besonders aber danke ich Herrn Geheimrat Prof. Dr. Sturm für die reiche Förderung und Anregung, die ich durch seine Vorlesungen und Uebungen genossen, und die mich auch zu der vorliegenden Arbeit führte.